

DTH1B3 - MATEMATIKA TELEKOMUNIKASI I

Sistem Persamaan Linear

By : Dwi Andi Nurmantris



Capaian Pembelajaran

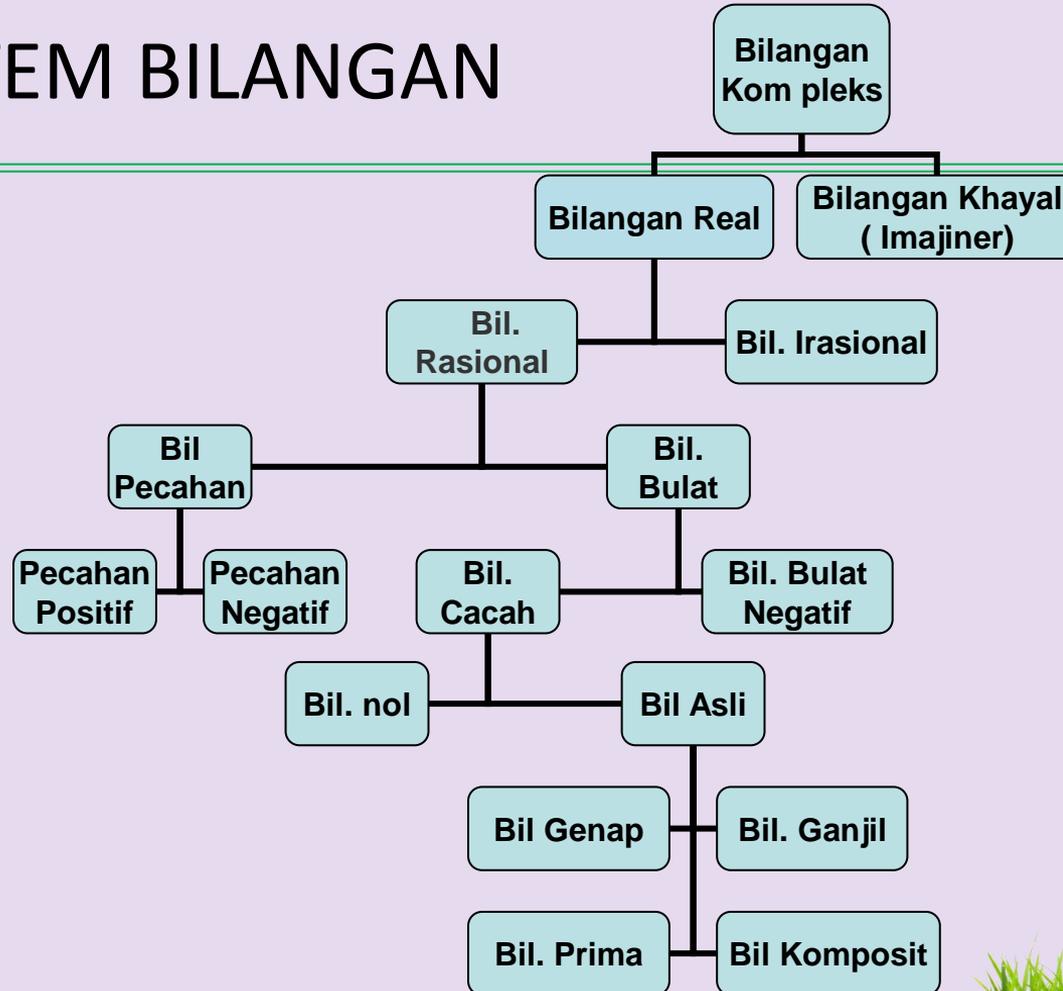
- Mampu menyelesaikan sistem persamaan linier dengan beberapa metode pencarian.
 - Mampu menyelesaikan pertidaksamaan.
- 



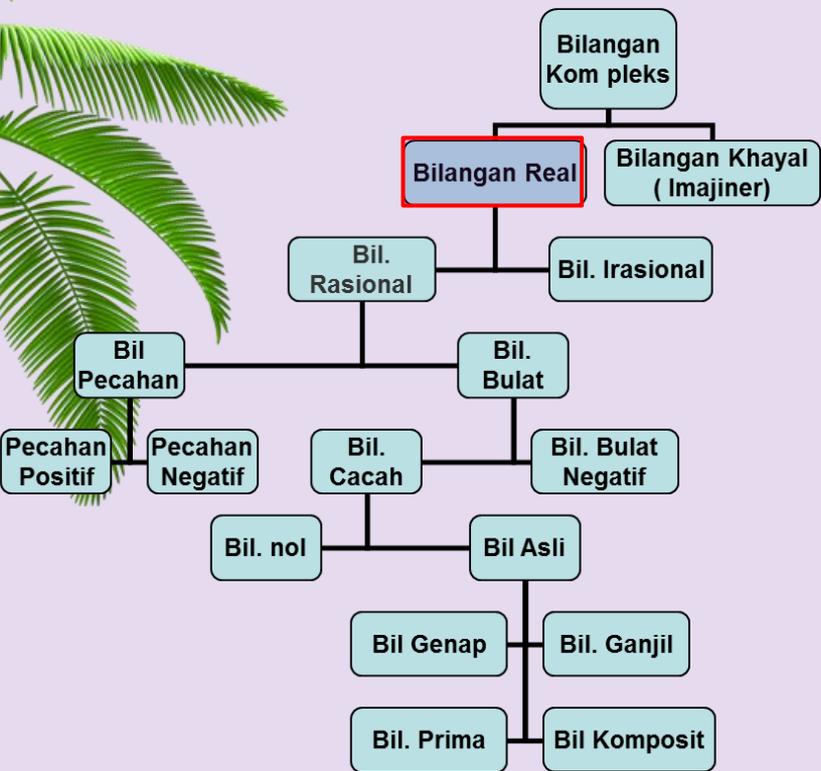
Materi Pembelajaran

- Sistem Bilangan Real
 - Penyelesaian Persamaan Linear
 - Penyelesaian Pertidaksamaan
- 

SISTEM BILANGAN

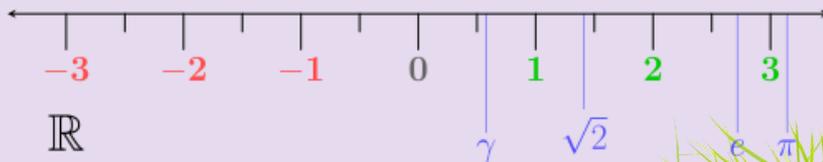


BILANGAN REAL

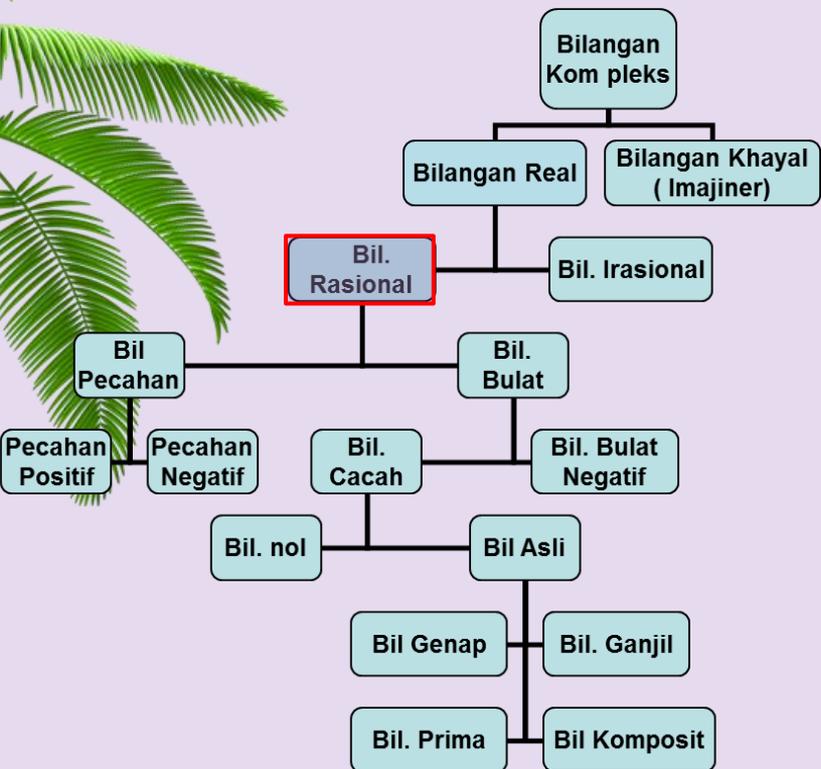


Bilangan Real

Bilangan Real adalah sekumpulan bilangan (rasional dan tak-rasional) dan bisa dituliskan dalam bentuk desimal, seperti 2,4871773339... atau 3,25678. serta dapat dilambangkan sebagai salah satu titik dalam garis bilangan



BILANGAN REAL



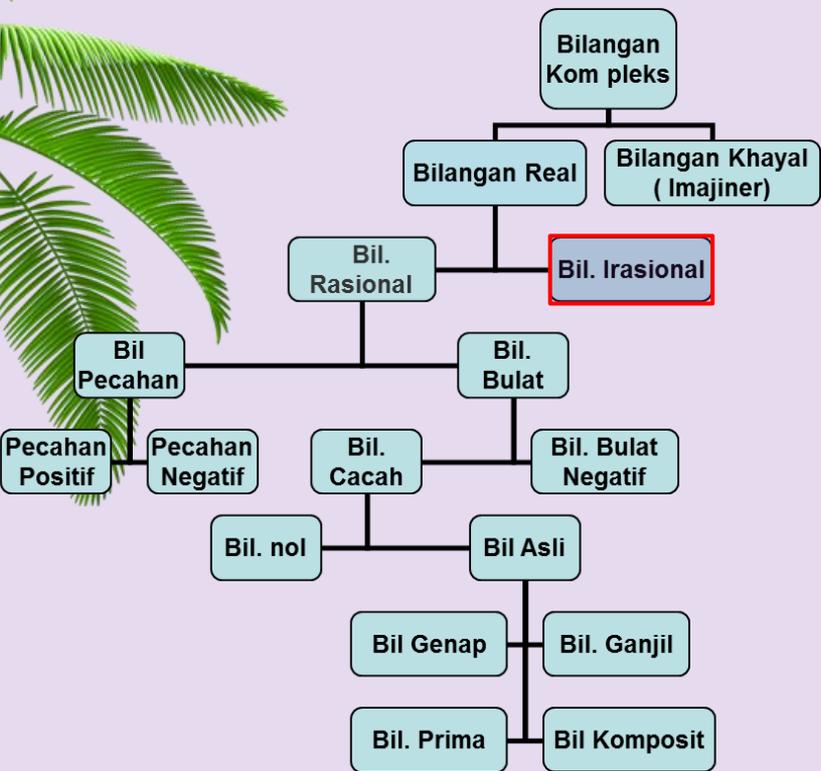
Bilangan Rasional

adalah bilangan yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ di mana a, b bilangan bulat dan b tidak sama dengan 0. di mana batasan dari bilangan rasional adalah mulai dari selang $(-\infty, \infty)$.

Contoh :

6, $\frac{1}{2}$, 0, -7, dst

BILANGAN REAL



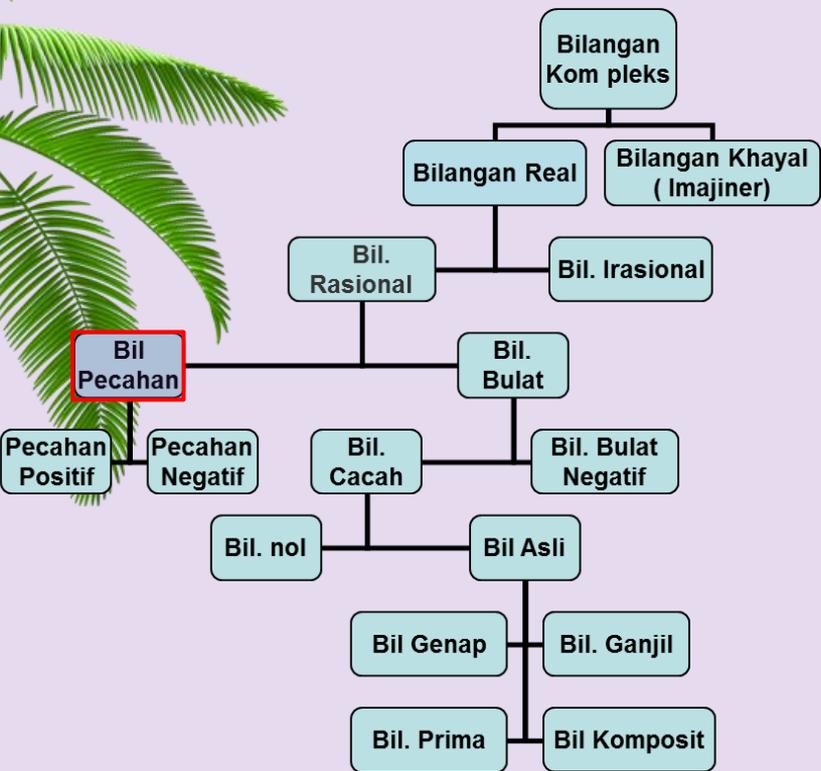
Bilangan Irasional

bilangan irasional adalah bilangan riil yang tidak bisa dibagi (hasil baginya tidak pernah berhenti). Dalam hal ini, bilangan irasional tidak bisa dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$, dengan a dan b sebagai bilangan bulat dan b tidak sama dengan nol

Contoh :

π , $\sqrt{2}$, dan bilangan e.

BILANGAN REAL

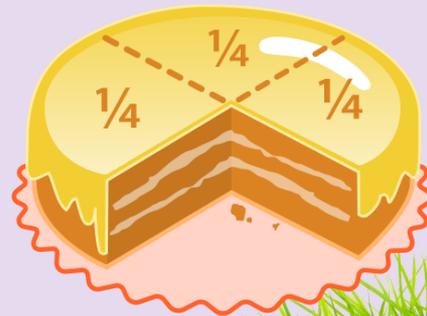


Bilangan Pecahan

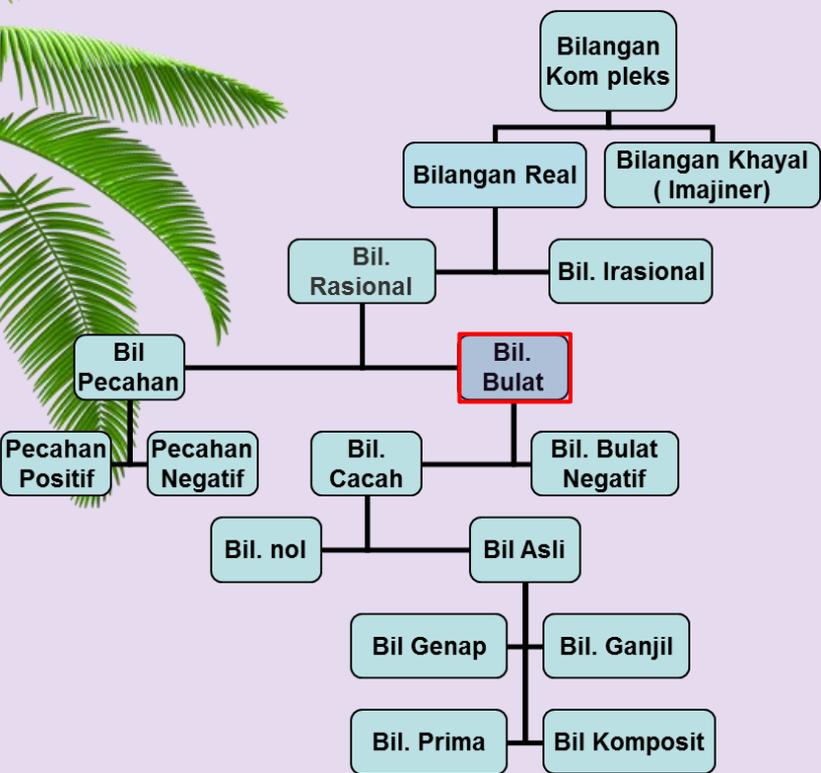
Bilangan Pecahan adalah bilangan matematika yang bisa dituliskan dalam bentuk **pembilang** dan **penyebut**

Contoh :

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$$



BILANGAN REAL



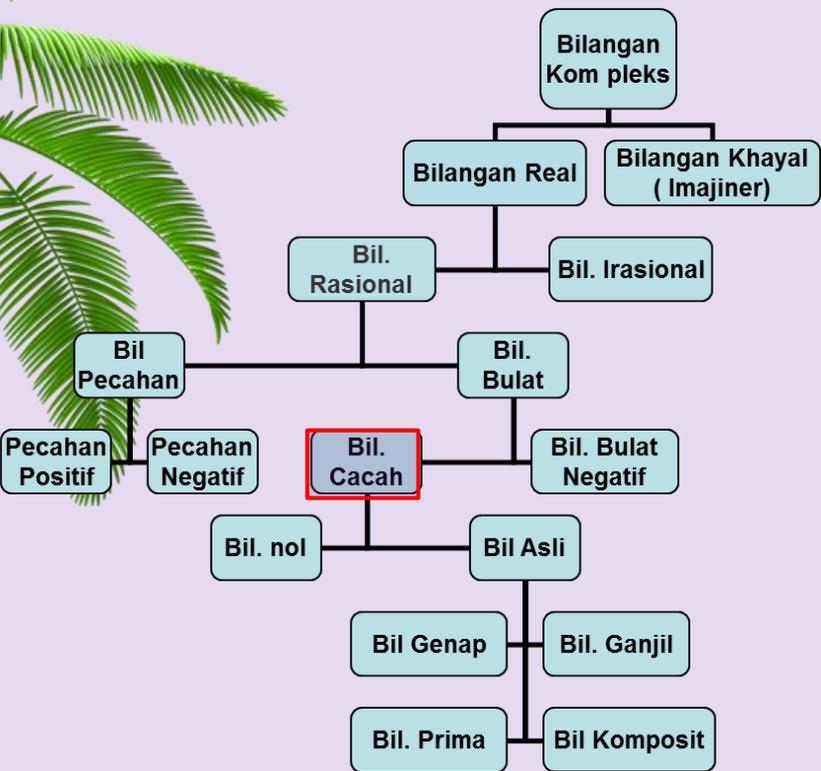
Bilangan Bulat

Bilangan bulat adalah bilangan yang terdiri dari bilangan cacah (0, 1, 2, 3, ...) dan negatifnya (-1, -2, -3, ...). Bilangan bulat dapat dituliskan tanpa komponen desimal atau pecahan

Contoh :

5, 7, 0, -17

BILANGAN REAL



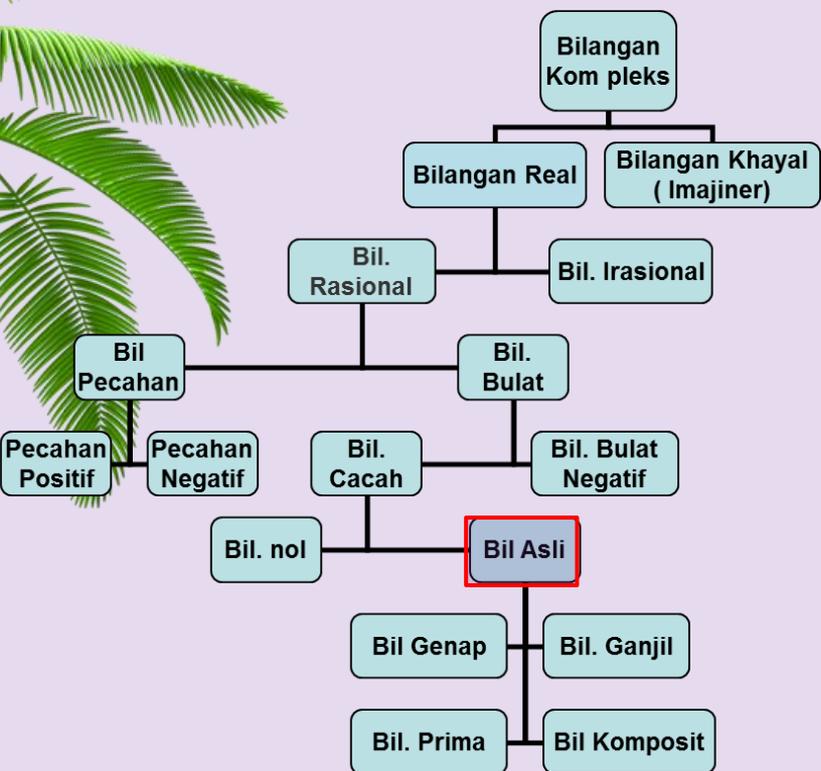
Bilangan Cacah

Bilangan cacah adalah himpunan bilangan bulat yang tidak negatif, yaitu $\{0, 1, 2, 3 \dots\}$. Dengan kata lain bilangan cacah adalah himpunan bilangan asli ditambah 0

Contoh :

5, 7, 0, 500

BILANGAN REAL



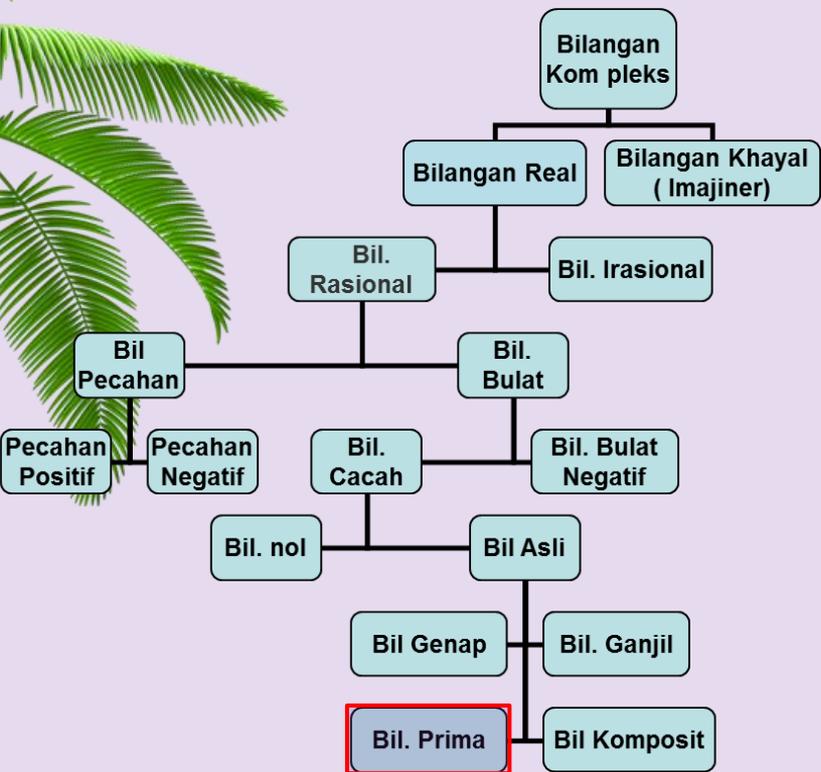
Bilangan Asli

Bilangan Asli adalah himpunan bilangan cacah positif yang bukan nol $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Contoh :

5, 7, 500

BILANGAN REAL



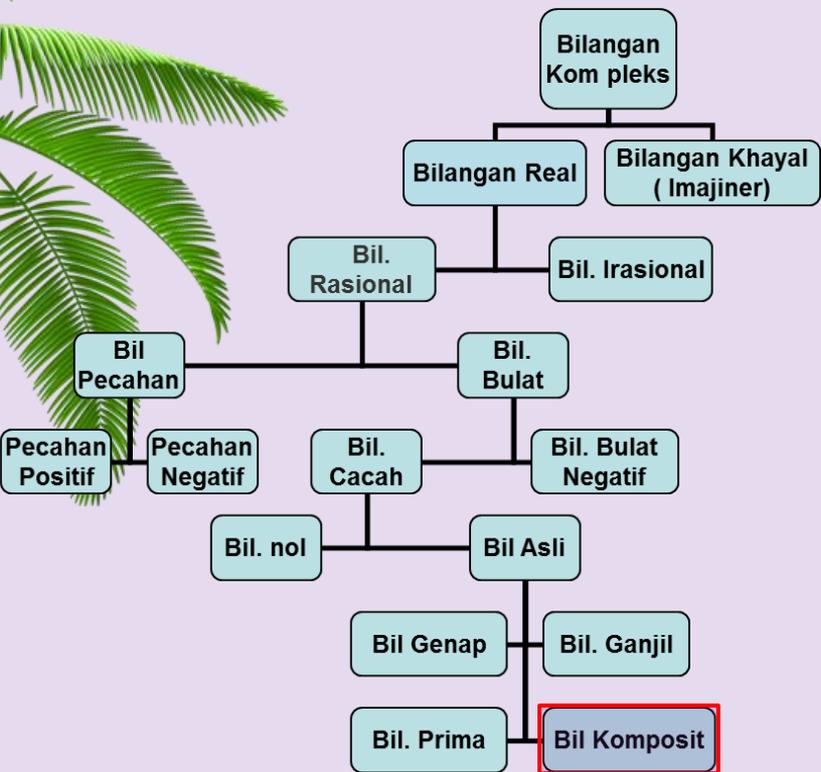
Bilangan Prima

Bilangan prima adalah bilangan yang hanya mempunyai dua faktor yaitu 1(satu) dan bilangan itu sendiri.

Contoh :

2, 3, 5, 7

BILANGAN REAL



Bilangan Komposit

Bilangan komposit adalah bilangan yang mempunyai faktor lebih dari 2

Contoh :

4, 6, 8, 12

BILANGAN REAL

Sifat Sifat Bilangan Real

1. Sifat-sifat aljabar
2. Sifat-sifat urutan
3. Sifat-sifat kelengkapan

Sifat – sifat aljabar menyatakan bahwa 2 bilangan real dapat ditambahkan, dikurangkan, dikalikan, dibagi (kecuali dengan 0) untuk memperoleh bilangan real yang baru.

contoh:

$$2 + 5\frac{1}{8} = 7\frac{1}{8}$$

$$5 - 0,4 = 4,6$$

$$4 \times \frac{3}{4} = 3$$

$$3 : 4 = \frac{3}{4}$$

BILANGAN REAL

Sifat Sifat Bilangan Real

1. Sifat-sifat aljabar
2. **Sifat-sifat urutan**
3. Sifat-sifat kelengkapan

Untuk setiap bilangan real a , b dan c berlaku sifat urutan berikut:

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- $a < b \Rightarrow a - c < b - c$
- $a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc$
- $a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc$
- $a > 0 \Rightarrow$

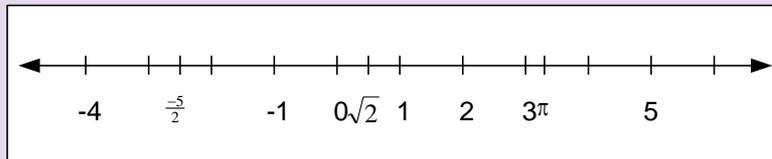
- Jika a dan b bertanda sama maka $a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

BILANGAN REAL

Sifat Sifat Bilangan Real

1. Sifat-sifat aljabar
2. Sifat-sifat urutan
3. **Sifat-sifat kelengkapan**

Sifat kelengkapan dari himpunan bilangan real secara garis besar menyatakan bahwa terdapat cukup banyak bilangan – bilangan real untuk mengisi garis bilangan real secara lengkap sehingga tidak ada setitikpun celah diantaranya



BILANGAN REAL

Nilai Mutlak

- ❑ Nilai mutlak x ($|x|$) didefinisikan sebagai jarak x dari titik pusat pada garis bilangan, sehingga jarak selalu bernilai positif.
- ❑ Definisi nilai mutlak :

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

• Sifat-sifat nilai mutlak:

- 1 $|x| = \sqrt{x^2}$
- 2 $|x| \leq a, a \geq 0 \iff -a \leq x \leq a$
- 3 $|x| \geq a, a \geq 0 \iff x \geq a \text{ atau } x \leq -a$
- 4 $|x| \leq |y| \iff x^2 \leq y^2$
- 5 $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

6. Ketaksamaan segitiga

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad |x - y| \geq ||x| - |y||$$



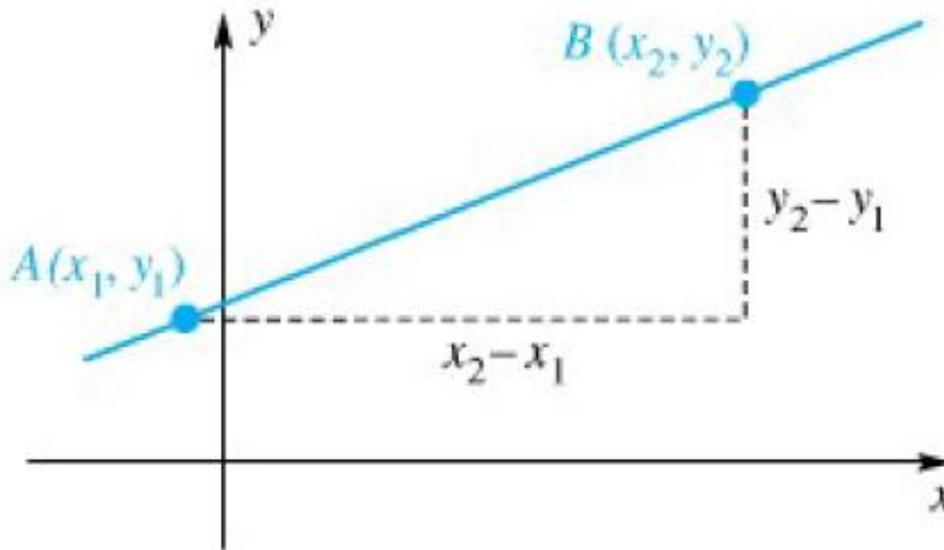
Pengertian : Sistem Linear

Persamaan Linier, yaitu suatu persamaan yang setiap sukunya mengandung konstanta dengan variabelnya berderajat satu (tunggal) dan persamaan ini, dapat digambarkan dalam sebuah grafik dalam sistem koordinat kartesius.

Suatu Persamaan akan tetap bernilai benar atau EKWIVALENT ($< = >$), Apabila ruas kiri dan ruas kanan ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama.



Kemiringan Garis – Bentuk Umum

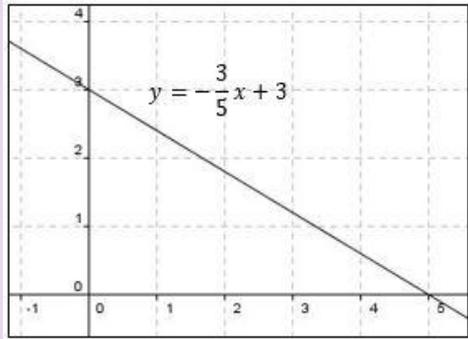


$$m = \frac{\text{rise}}{\text{run}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

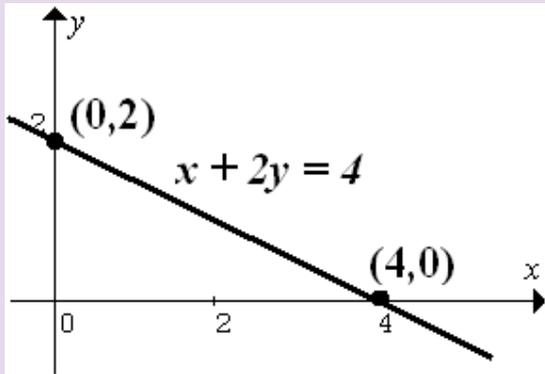
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

m = Kemiringan/gradien

Kemiringan Garis – Bentuk Umum



Untuk persamaan garis $y = mx + c$ maka gradien garis sudah langsung ketemu yaitu m

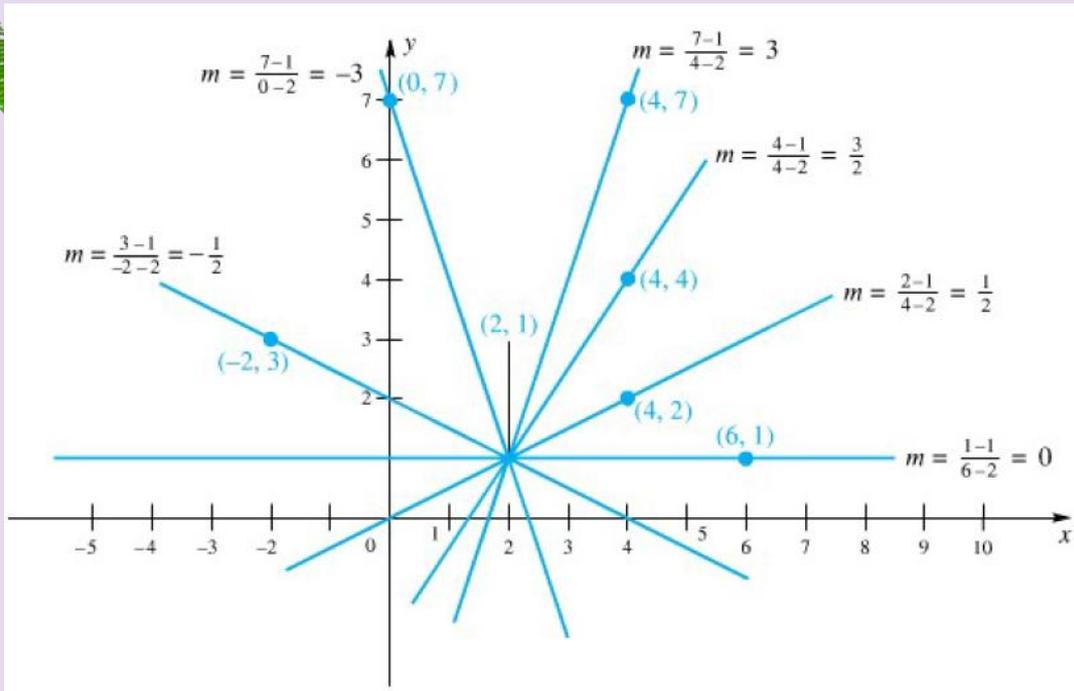


Untuk persamaan garis $ax + by + c = 0$ maka gradien garis $m = -a/b$

$m =$ Kemiringan/gradien

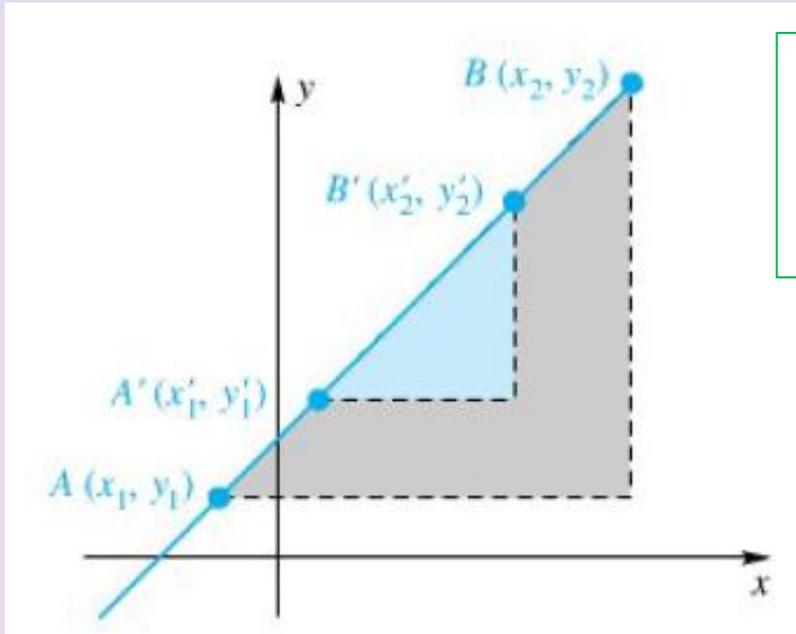
Kemiringan Garis

Bentuk Kemiringan Garis (Positif, Negatif, Nol)



Kemiringan Garis

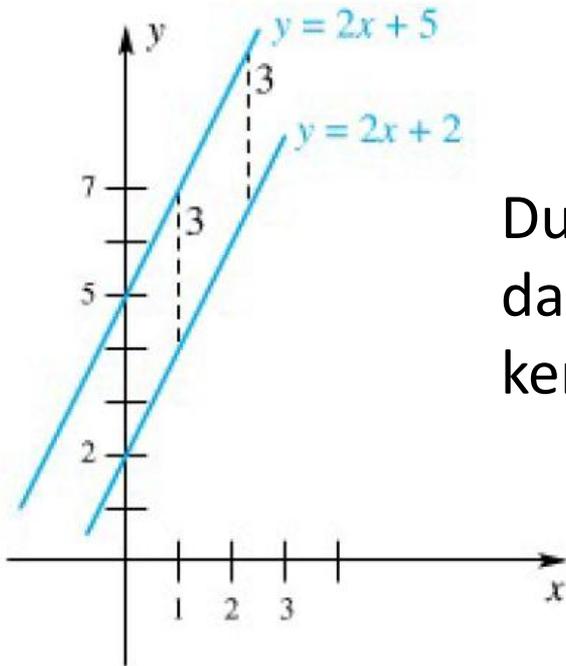
Dua Garis Dengan Kemiringan Yang Sama



$$\frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Kemiringan Garis

Garis – Garis Sejajar

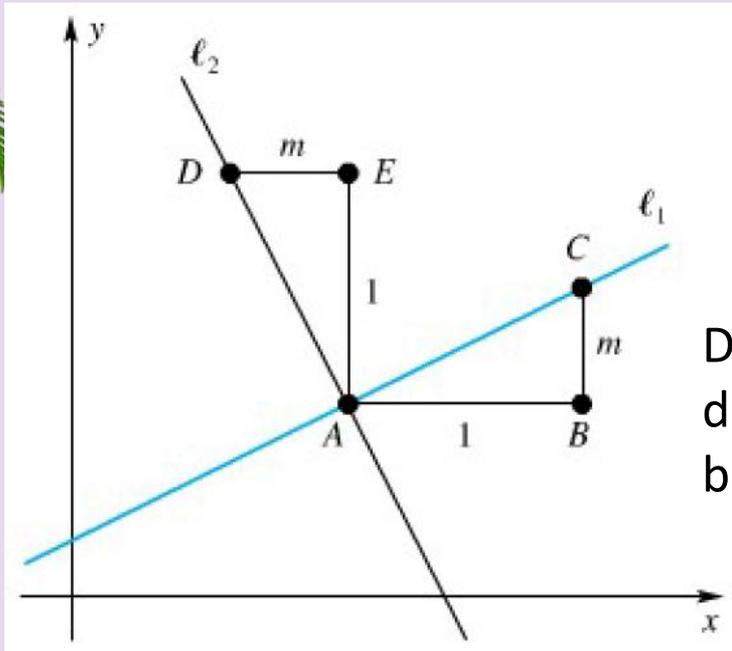


$$m_1 = m_2$$

Dua garis tak vertikal adalah **sejajar** jika dan hanya jika keduanya mempunyai kemiringan yang sama.

Kemiringan Garis

Garis – Garis Tegak Lurus



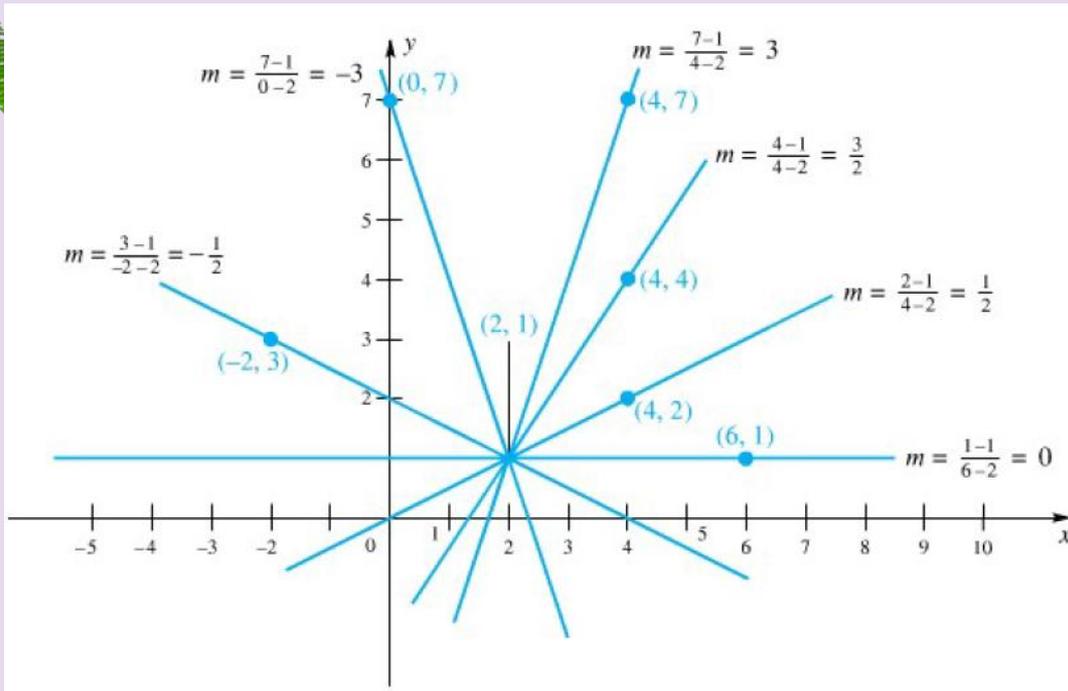
$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$
$$\frac{y_1}{x_1} = -\frac{x_2}{y_2}$$

Dua garis tak vertikal saling **tegak lurus** jika dan hanya jika kemiringan keduanya saling berkebalikan negatif.

Persamaan Garis Lurus

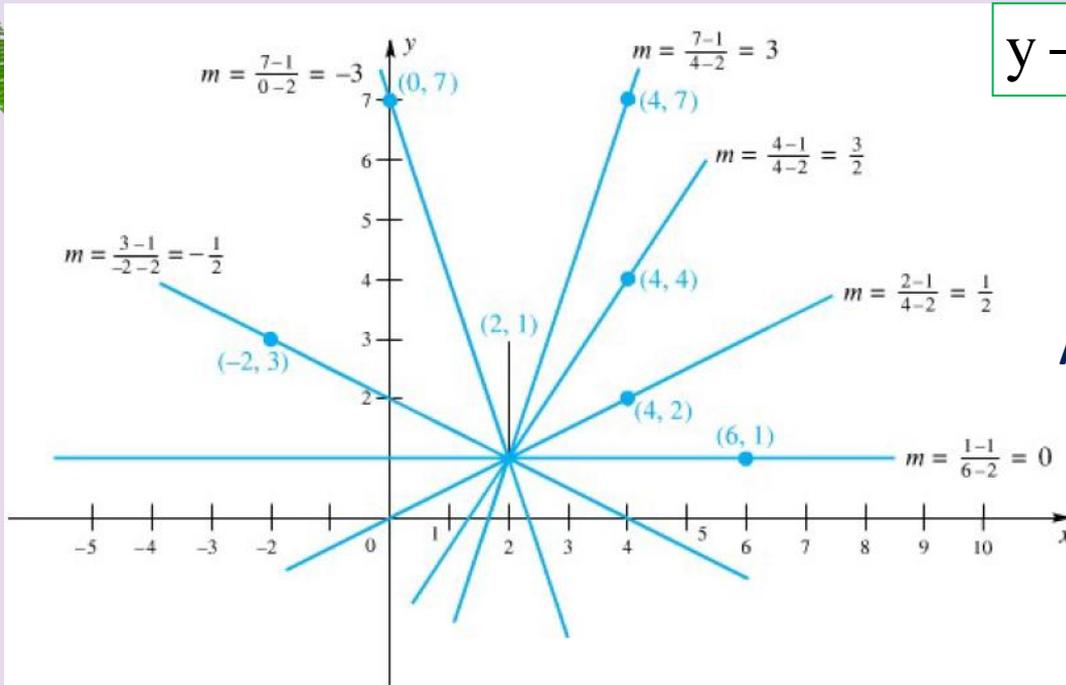
Jika melalui suatu titik $A(x_1, y_1)$ dan bergradien m

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



Persamaan Garis Lurus

Jika melalui titik $A(X_1, Y_1)$ dan titik $B(X_2, Y_2)$



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

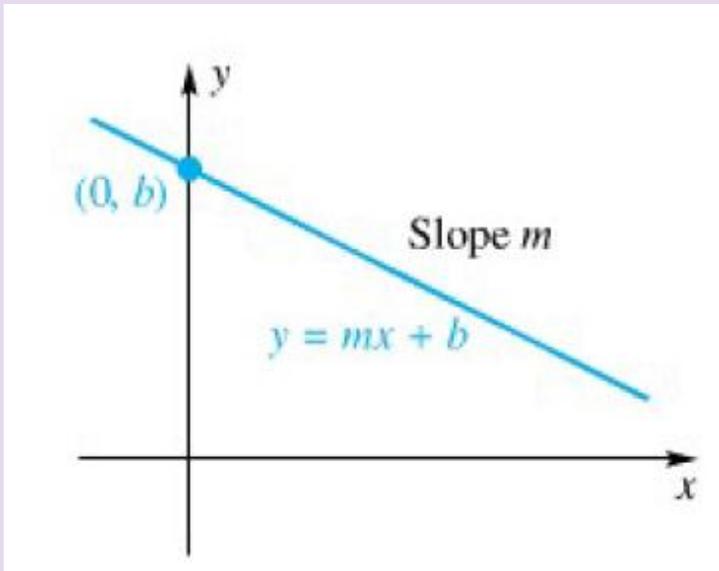
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Atau

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Persamaan Garis Lurus

Jika Berpotongan dengan sumbu y

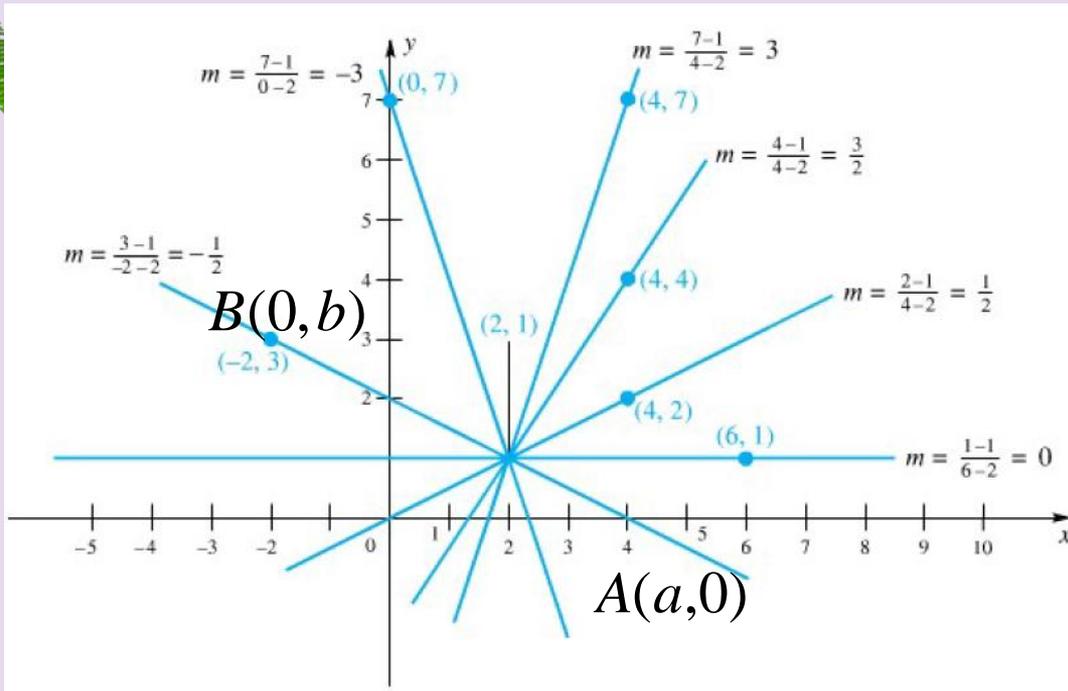


$$y - b = m(x - 0)$$

$$y = mx + b$$

Persamaan Garis Lurus

Jika Berpotongan dengan sumbu X dan Sumbu Y



$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

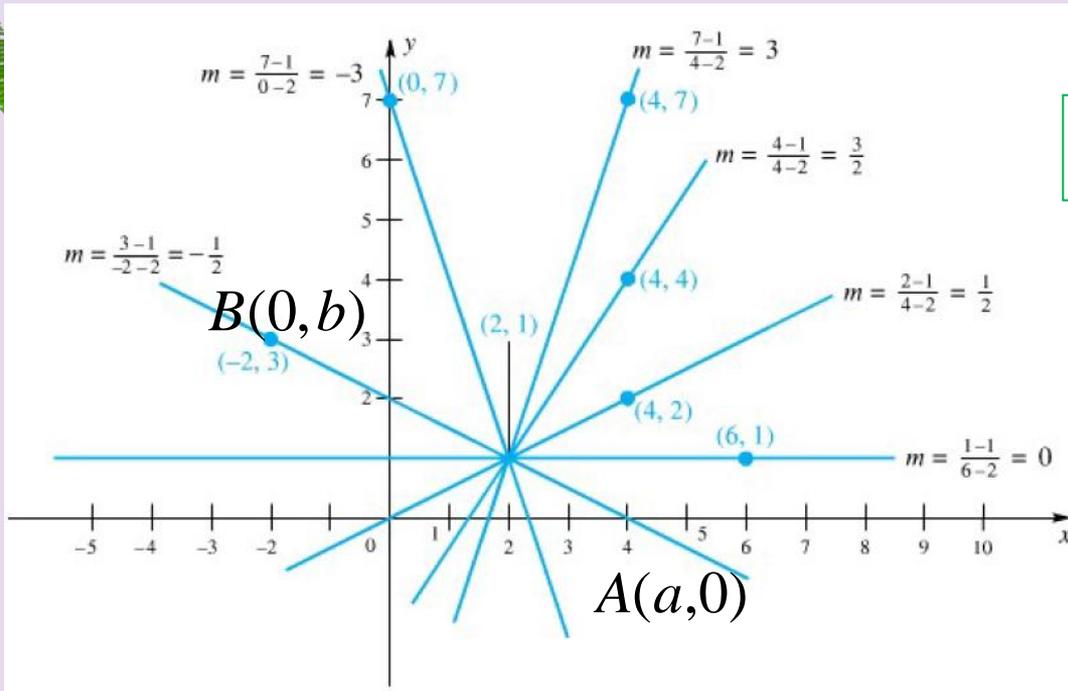
$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{x - a}{-a}$$

$$bx + ay = ab$$

Persamaan Garis Lurus

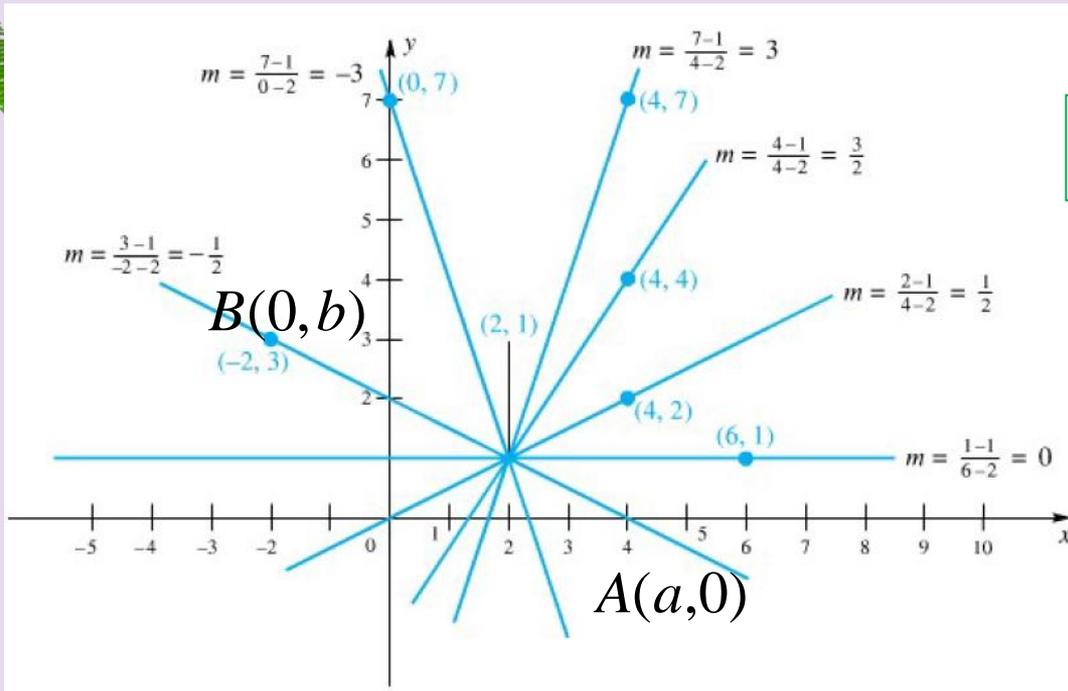
Jika Melalui $A(x_1, y_1)$ dan **sejajar** garis $ax + by = c$



$$ax + by = ax_1 + by_1$$

Persamaan Garis Lurus

Jika Melalui $A(x_1, y_1)$ dan **Tegak Lurus** garis $ax + by = c$



$$bx - ay = bx_1 - ay_1$$



Persamaan Linear Umum

$$Ax + By + C = 0$$

Catatan: A dan B keduanya tak 0





Metoda Penyelesaian Persamaan Linear

Ada beberapa metode yang dapat digunakan dalam menyelesaikan sebuah permasalahan persamaan linier. Metode – metode tersebut adalah :

- a. Metode Substitusi
 - b. Metode Eliminasi
 - c. Metode Campuran (eliminasi dan substitusi)
 - d. Metode grafik
- 

Metoda Penyelesaian Persamaan Linear

Metoda Substitusi

Metode substitusi yaitu metode atau cara menyelesaikan persamaan linier dengan mengganti salah satu peubah dari suatu persamaan dengan peubah yang diperoleh dari persamaan linier yang lainnya .

Untuk lebih jelasnya lagi , perhatikan contoh berikut ini :

Contoh 1.

Diketahui persamaan $x + 3y = 7$ (1) dan $2x + 2y = 6$ (2), tentukan himpunan penyelesaiannya.

Langkah 1:

Cari nilai x sebagai fungsi dari y :

$$x + 3y = 7$$

$$\Leftrightarrow x = -3y + 7 \dots (3)$$

Metoda Penyelesaian Persamaan Linear

Metoda Substitusi

Langkah 2:

Lalu , masukkan persamaan (3) ke dalam persamaan (2) untuk mencari nilai y

$$2x + 2y = 6$$

$$\Leftrightarrow 2(-3y + 7) + 2y = 6$$

$$\Leftrightarrow -6y + 14 + 2y = 6$$

$$\Leftrightarrow -6y + 2y = 6 - 14$$

$$\Leftrightarrow -4y = -8$$

$$\Leftrightarrow y = 2$$

Langkah 3:

Gunakan persamaan antara persamaan (1) atau (2) untuk mencari nilai x

$$x + 3y = 7$$

$$\Leftrightarrow x + 3(2) = 7$$

$$\Leftrightarrow x + 6 = 7$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Jadi , himpunan penyelesaiannya, $HP = \{ 1 , 2 \}$

Metoda Penyelesaian Persamaan Linear

Metoda Eliminasi

Metode Eliminasi , yaitu metode penyelesaian sistem persamaan linier dengan cara mengeliminasi atau menghilangkan salah satu peubah dengan menambahkan atau mengurangi dengan menyamakan koefisien yang akan dihilangkan tanpa memperhatikan nilai positif atau negatif .

Apabila peubah yang akan dihilangkan bertanda sama , maka untuk mengeliminasi menggunakan sistem operasi pengurangan. Dan sebaliknya apabila peubah yang akan dihilangkan bertanda berbeda, maka untuk mengeliminasi menggunakan operasi penjumlahan.

Untuk lebih jelasnya , perhatikan contoh berikut ini :

Menyelesaikan Contoh 1 dengan metode eliminasi.

Diketahui dua persamaan $x + 3y = 7$ dan $2x + 2y = 6$, tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan tersebut.

Metoda Penyelesaian Persamaan Linear

Metoda Eliminasi

Langkah pertama adalah lakukan eliminasi dengan mengurangi untuk menghilangkan peubah atau koefisien x untuk mengetahui nilai y.

$$\underline{2x + 2y = 6} : 2$$

$$\Leftrightarrow x + y = 3$$

lalu , lakukan

$$x + 3y = 7$$

$$\underline{x + y = 3} \quad \underline{\quad}$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

Metoda Penyelesaian Persamaan Linear

Metoda Eliminasi

Langkah selanjutnya adalah lakukan eliminasi dengan mengurangi untuk menghilangkan peubah atau koefisien y untuk mengetahui nilai x

$$2x + 2y = 6 \quad | \quad \times 3 \quad | \quad \Leftrightarrow \quad 6x + 6y = 18$$

$$x + 3y = 7 \quad | \quad \times 2 \quad | \quad \Leftrightarrow \quad \underline{2x + 6y = 14} \quad _$$

$$4x + 0 = 4$$

$$x = 1$$

Jadi, himpunan penyelesaian yang dihasilkan sama yaitu:

$$HP = \{ 1, 2 \}$$

Metoda Penyelesaian Persamaan Linear

Metoda Campuran (Eliminasi+Substitusi)

Yang dimaksud dari metode ini, yaitu kita dalam mencari himpunan penyelesaian menggunakan dua metode, boleh gunakan eliminasi terlebih dahulu atau sebaliknya .

Untuk lebih jelasnya , perhatikan contoh berikut :

Menyelesaikan Contoh 1 dengan metode campuran.

Langkah pertama lakukan metode eliminasi , untuk mencari nilai x

$$2x + 2y = 6 \quad | \quad \times 3 \quad | \quad \Leftrightarrow \quad 6x + 6y = 18$$

$$x + 3y = 7 \quad | \quad \times 2 \quad | \quad \Leftrightarrow \quad \underline{2x + 6y = 14} \quad _$$

$$4x + 0 = 4$$

$$x = 1$$

Metoda Penyelesaian Persamaan Linear

Metoda Campuran (Eliminasi+Substitusi)

Selanjutnya substitusikan nilai x ke dalam salah satu persamaan :

$$x + 3y = 7$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3y = 7$$

$$\Leftrightarrow 3y = 7 - 1$$

$$\Leftrightarrow 3y = 6$$

$$\Leftrightarrow y = 2$$

Maka hasilnya pun sama yaitu $HP = \{ 1 , 2 \}$

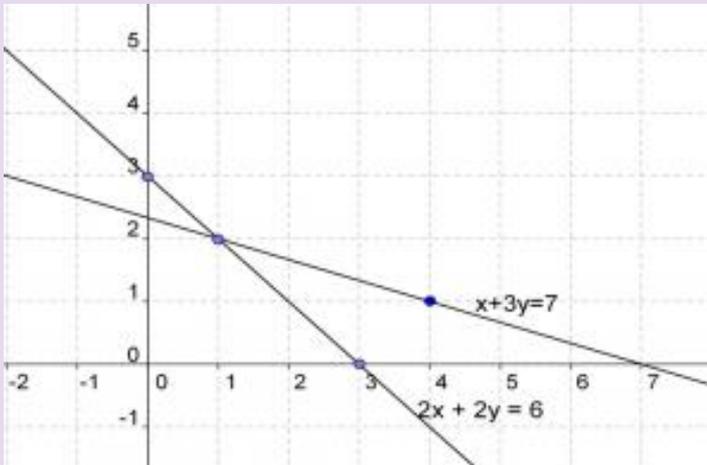
Metoda Penyelesaian Persamaan Linear

Metoda Grafik

Metode grafik, yaitu dengan menggambarkan dua persamaan pada koordinat kartesian, dan himpunan penyelesaiannya dihasilkan dari titik perpotongan kedua garis tersebut. Yang perlu diperhatikan yaitu ketika menggambar kedua garis tersebut, titik sumbu kartesian-nya harus konsisten .

Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar grafik berikut :

Menyelesaikan Contoh 1 dengan metode grafik.



Dari gambar di samping , maka kita dapat melihat bahwa titik potongnya berada pada titik $\{ 1 , 2 \}$, atau $HP = \{ 1 , 2 \}$.

CONTOH SOAL

Diketahui:

$$\text{Garis A : } 3x + 4y = 8$$

$$\text{Garis B : } 6x - 10y = 7$$

Carilah persamaan Garis C, yaitu garis yang tegak lurus terhadap garis A, dan melalui titik perpotongan antara Garis A dan Garis B.

Penyelesaian:

Untuk mencari titik potong antara Garis A dan Garis B, persamaan Garis A dikalikan dengan -2, lalu dijumlahkan dengan persamaan Garis B.

$$-6x - 8y = -16$$

$$\underline{6x - 10y = 7} +$$

$$-18y = -9$$

$$y = \frac{1}{2}$$

CONTOH SOAL

Dengan mensubstitusi $y = \frac{1}{2}$ kedalam salah satu persamaan Garis A atau Garis B, akan diperoleh $x = 2$. Maka titik perpotongannya adalah $(2, \frac{1}{2})$.

Garis yang tegak lurus terhadap Garis A akan memiliki kemiringan:

$$m_C = -\frac{1}{m_A}$$

Garis A : $y = -\frac{3}{4}x + 2 \iff m_A = -\frac{3}{4}$

Maka, $m_C = \frac{4}{3}$

Sehingga Garis C: $y - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}(x - 2)$

LATIHAN SOAL

1. Tentukan persamaan garis yang melalui titik $(9 , 12)$, dan sejajar dengan garis $3x - 5y - 11 = 0$.
2. Tentukan persamaan garis yang melalui titik $(3 , -3)$ dan tegak lurus terhadap garis $y = 2x + 5$.
3. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $3x - 5y - 11 = 0$ dan $y = \frac{12}{20}x + 5$

PERTIDAKSAMAAAN

Menyelesaikan suatu pertidaksamaan adalah mencari semua himpunan bilangan riil yang membuat pertidaksamaan berlaku. Himpunan pemecahan suatu pertidaksamaan biasanya terdiri dari suatu keseluruhan selang bilangan, atau gabungan dari selang-selang bilangan.

PERTIDAKSAMAAN

Set Notation	Interval Notation	Graph
$\{x: a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x: a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x: a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x: a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x: x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x: x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x: x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x: x > a\}$	(a, ∞)	
\mathbb{R}	$(-\infty, \infty)$	

Selang/Interval
sebagai himpunan
penyelesaian
pertidaksamaan



PERTIDAKSAMAAN

Cara mencari Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan (Fungsi Linear)

- tambahkan kedua sisi dengan bilangan yang sama
- kalikan kedua sisi dengan bilangan positif
- kalikan kedua sisi dengan bilangan negatif, tapi tanda ketidaksamaan berubah

PERTIDAKSAMAAAN

Contoh 1

Selesaikan pertidaksamaan dibawah ini dan gambarkan grafik solusinya. $2x - 7 < 4x - 2$

Solusi:

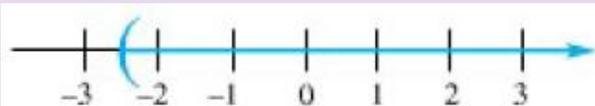
$$2x - 7 < 4x - 2$$

$$2x < 4x + 5 \quad (\text{adding } 7)$$

$$-2x < 5 \quad (\text{adding } -4x)$$

$$x > -\frac{5}{2} \quad (\text{multiplying by } -\frac{1}{2})$$

Grafik:



$$\left(-\frac{5}{2}, \infty\right) = \left\{x : x > -\frac{5}{2}\right\}$$

PERTIDAKSAMAAN

Contoh 2

Selesaikan pertidaksamaan dibawah ini dan gambarkan grafik solusinya. $-5 \leq 2x + 6 < 4$

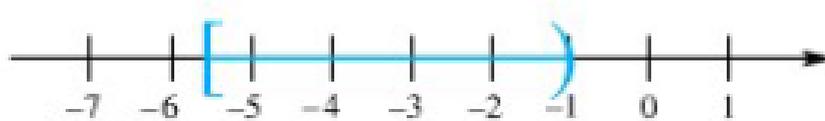
$$-5 \leq 2x + 6 < 4$$

Solusi:

$$-11 \leq 2x < -2 \quad (\text{adding } -6)$$

$$-\frac{11}{2} \leq x < -1 \quad (\text{multiplying by } \frac{1}{2})$$

Grafik:



$$\left[-\frac{11}{2}, -1\right) = \left\{x : -\frac{11}{2} \leq x < -1\right\}$$

PERTIDAKSAMAAN

Cara mencari Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan (non linear)

1. Bentuk pertidaksamaan diubah menjadi : $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, dengan cara :
 - Ruas kiri atau ruas kanan dinolkan (caranya bisa ditambahkan, dikalikan dengan bilangan positif, dikalikan dengan bilangan negatif (berubah tanda ketidaksamaan) pada kedua ruas
 - Menyamakan penyebut dan menyederhanakan bentuk pembilangnya
2. Dicari titik-titik pemecah dari pembilang dan penyebut dengan cara $P(x)$ dan $Q(x)$ diuraikan menjadi faktor-faktor linier dan/ atau kuadrat
3. Gambarkan titik-titik pemecah tersebut pada garis bilangan, kemudian tentukan tanda (+, -) pertidaksamaan di setiap selang bagian yang muncul

PERTIDAKSAMAAAN

Contoh 3

Selesaikan pertidaksamaan dibawah ini dan gambarkan grafik solusinya.

$$x^2 - x < 6$$

Solusi:

$$x^2 - x < 6$$

$$x^2 - x - 6 < 0 \quad (\text{adding } -6)$$

$$(x - 3)(x + 2) < 0 \quad (\text{factoring})$$

$x = 3$ dan $x = -2$ merupakan titik-titik yang membagi garis bilangan menjadi tiga interval yaitu

$$(-\infty, -2), (-2, 3), \text{ and } (3, \infty)$$

Pada tiap interval, $(x - 3)(x + 2)$ akan selalu memiliki tanda positif atau negatif. Oleh karena itu, diambil tiga titik uji coba untuk dimasukkan kedalam pertidaksamaan tersebut.

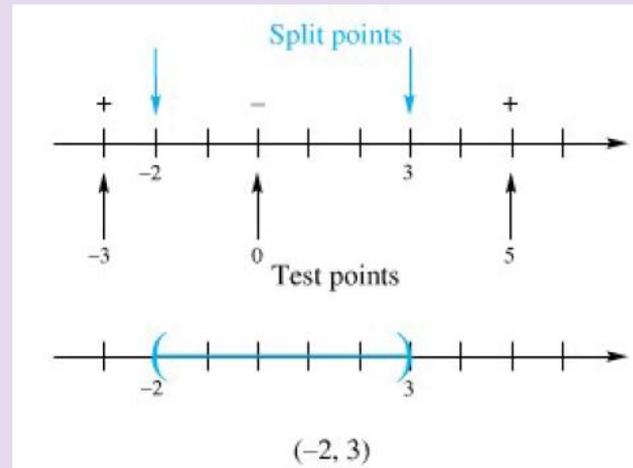
PERTIDAKSAMAAAN

Contoh 3

Test Point	Sign of $(x - 3)$	Sign of $(x + 2)$	Sign of $(x - 3)(x + 2)$
-3	-	-	+
0	-	+	-
5	+	+	+

Dari tiga titik uji coba samping, diperoleh bahwa nilai $(x - 3)(x + 2)$ akan selalu kecil dari nol pada interval $(-2, 3)$.

Grafik:



PERTIDAKSAMAAN

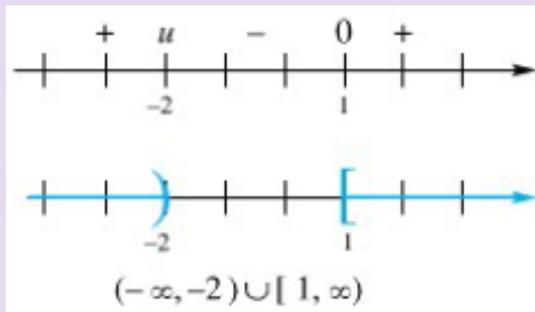
Contoh 4

Selesaikan pertidaksamaan dibawah ini dan gambarkan grafik solusinya.

$$\frac{x - 1}{x + 2} \geq 0$$

Solusi:

Mengikuti langkah pada Contoh 3, dapat diamati bahwa titik-titik pembagi berada pada $x = 1$ dan $x = -2$. Dengan mengambil beberapa titik uji coba, diperoleh solusi seperti pada grafik. -2 tidak termasuk himpunan penyelesaian karena akan menyebabkan pertidaksamaan menjadi tak hingga.



LATIHAN SOAL

1) $13 \geq 2x - 3 \geq 5$

6) $|2x - 5| < 3$

2) $-2 < 6 - 4x \leq 8$

3) $2x^2 - 5x - 3 < 0$

4) $2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$

5) $\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3x-1}$



Referensi Tambahan

- Edwin J. Purcell & Dale Varberg. Calculus with Analytic Geometry, 5th ed. Prentice-Hall, Inc.
 - <http://rumusrumus.com/sistem-persamaan-linier/>
- 



Thank you!

