Telkom University

Diploma of Telecommunication Engineering

DTH1B3 - MATEMATIKA TELEKOMUNIKASI I

Fungsi dan Grafik

By : Dwi Andi Nurmantris

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mampu memahami definisi fungsi, macam-macam fungsi dan grafik fungsi.

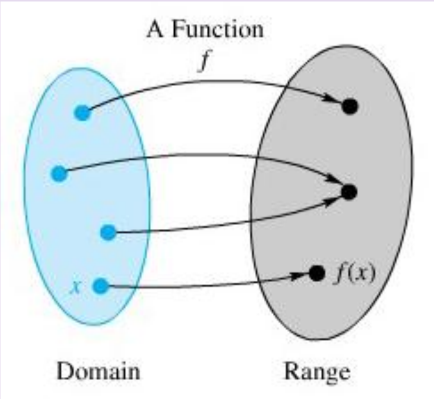
MATERI PEMBELAJARAN

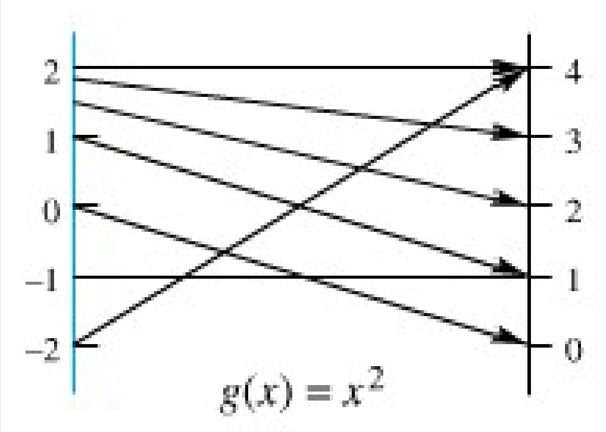
- Definisi Fungsi
- Operasi Fungsi
- Fungsi Trigonometri
- Fungsi Logaritmik
- Fungsi Exponensial

FUNGSI

Definisi

Sebuah fungsi *f* adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan setiap objek *x* dalam satu himpunan, yang disebut daerah asal, dengan **<u>sebuah</u>** nilai unik *f(x)* dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (jelajah).





FUNGSI

Definisi

Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan :

$$f : A \rightarrow B$$

yang artinya f **memetakan** A ke B.
A disebut **daerah asal** (*domain*) dari f dan B disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari f.

REPRESENTASI FUNGSI

Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:

- Himpunan pasangan terurut.

  Contoh : $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$

- Formula pengisian nilai (*assignment*).

  Contoh : $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$ dan $f(x) = 1/x$.

- Kata-kata

  Contoh : "*f* adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu *string* biner".

REPRESENTASI FUNGSI

$$y = a + bx$$

Independent variable

Koefisien var. x

Dependent variable

Konstanta

FUNGSI

Contoh

Tentukan hasil atau daerah hasil dari $f(x) = x^2 - 2x$

untuk:

(a) $f(4)$

(b) $f(4 + h)$

(c) $f(4 + h) - f(4)$

(d) $[f(4 + h) - f(4)]/h$

Solusi:

(a) $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$

(b) $f(4 + h) = (4 + h)^2 - 2(4 + h) = 16 + 8h + h^2 - 8 - 2h$
$= 8 + 6h + h^2$

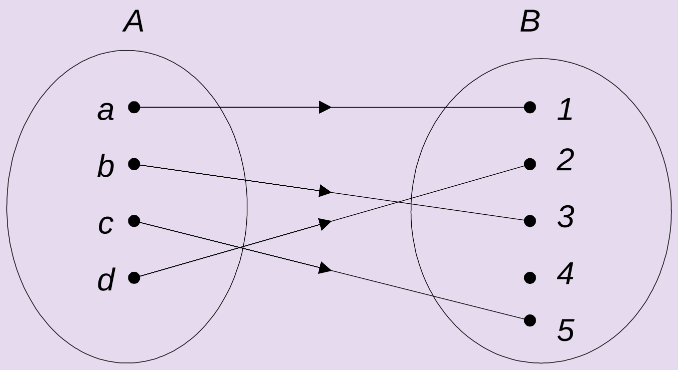
(c) $f(4 + h) - f(4) = 8 + 6h + h^2 - 8 = 6h + h^2$

(d) $\dfrac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \dfrac{6h + h^2}{h} = \dfrac{h(6 + h)}{h} = 6 + h$

FUNGSI

Fungsi One to One

Fungsi *f* dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan *A* yang memiliki bayangan sama.



FUNGSI

Contoh

- **Contoh .** Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2+1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

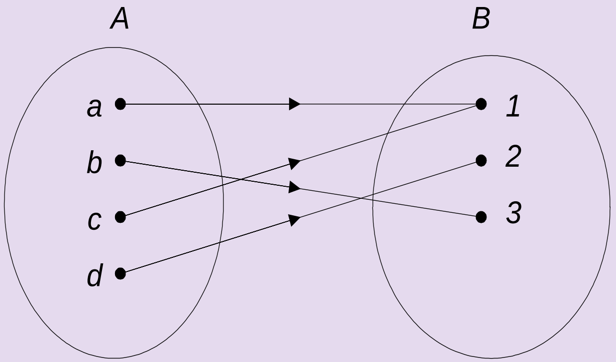
Penyelesaian:

- (i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena untuk dua x yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya $f(2) = f(-2) = 5$ padahal $-2 \neq 2$.
- (ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk $a \neq b$, $a - 1 \neq b - 1$. Misalnya untuk $x = 2$, $f(2) = 1$ dan untuk $x = -2$, $f(-2) = -3$.

FUNGSI

Fungsi ONTO

- Fungsi *f* dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan *B* merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan *A*.
- Dengan kata lain seluruh elemen *B* merupakan jelajah dari *f*. Fungsi *f* disebut fungsi pada himpunan *B*.



FUNGSI

Contoh

- **Contoh .** Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi pada?

Penyelesaian:

- (i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi pada, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari f.
- (ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan bulat y, selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x - 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$.

FUNGSI

Fungsi Berkoresponden satu ke satu

- Fungsi *f* dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu (one to one) dan juga fungsi pada (onto).
- Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya. Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada.

FUNGSI

Invers dari Fungsi

- Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan **balikan** (*invers*) dari f.
- Balikan fungsi dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.

FUNGSI

Contoh :

- **Contoh .** Tentukan balikan fungsi $f(x) = x - 1$.

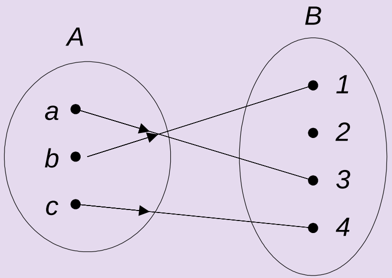
Penyelesaian:

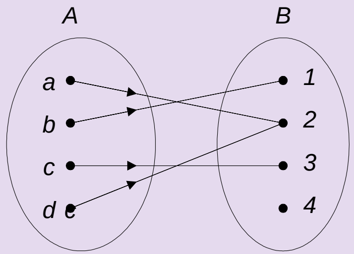
- Fungsi $f(x) = x - 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada.
- Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x - 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah

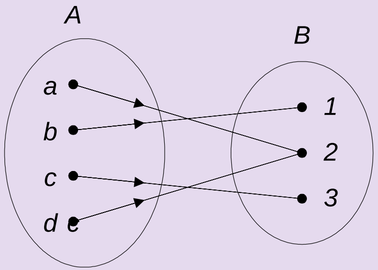
  $f^{-1}(x) = y + 1$.

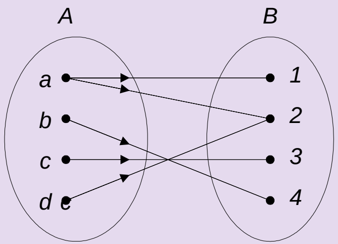
LATIHAN SOAL

Termasuk fungsi one to one , onto atau kedua duanya









GRAFIK FUNGSI

Prosedur membuat grafik dari suatu fungsi pada sistem koordinat :

1. Cari beberapa titik koordinat yang memenuhi fungsi tersebut
2. Plot titik-titik tersebut pada sistem koordinat
3. Hubungkan titik-titik tersebut

GRAFIK FUNGSI

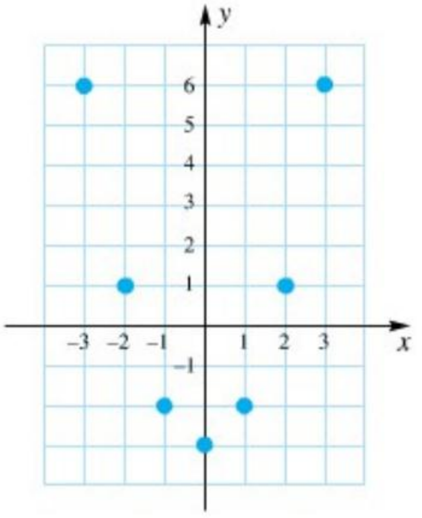
Contoh

$$f(x) = x^2 - 3$$

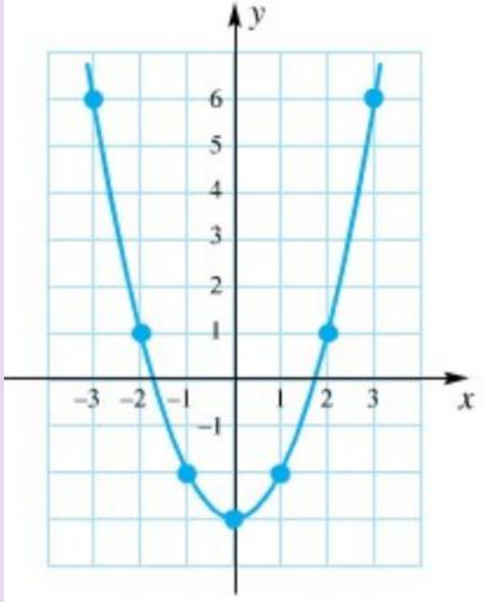
$y = x^2 - 3$

x	y
–3	6
–2	1
–1	–2
0	–3
1	–2
2	1
3	6

Step 1
Make a table of values.



Step 2
Plot those points.



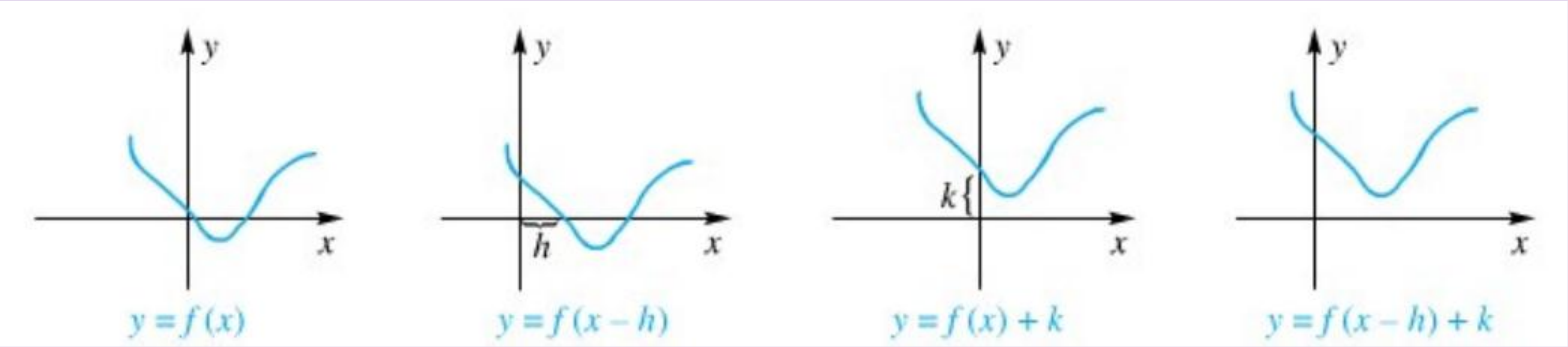
Step 3
Connect those points with a smooth curve.

LATIHAN SOAL

Gambarlah grafik untuk fungsi-fungsi berikut:

1. $g(x) = x^2 - 2$
2. $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$
3. $g(x) = x^3 - 2x$
4. $g(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{x^4 - 3x^2 + 4}$
5. $g(x) = |x|$

PERGESERAN GRAFIK FUNGSI



Grafik fungsi asal

Menggeser grafik sejauh h ke kanan

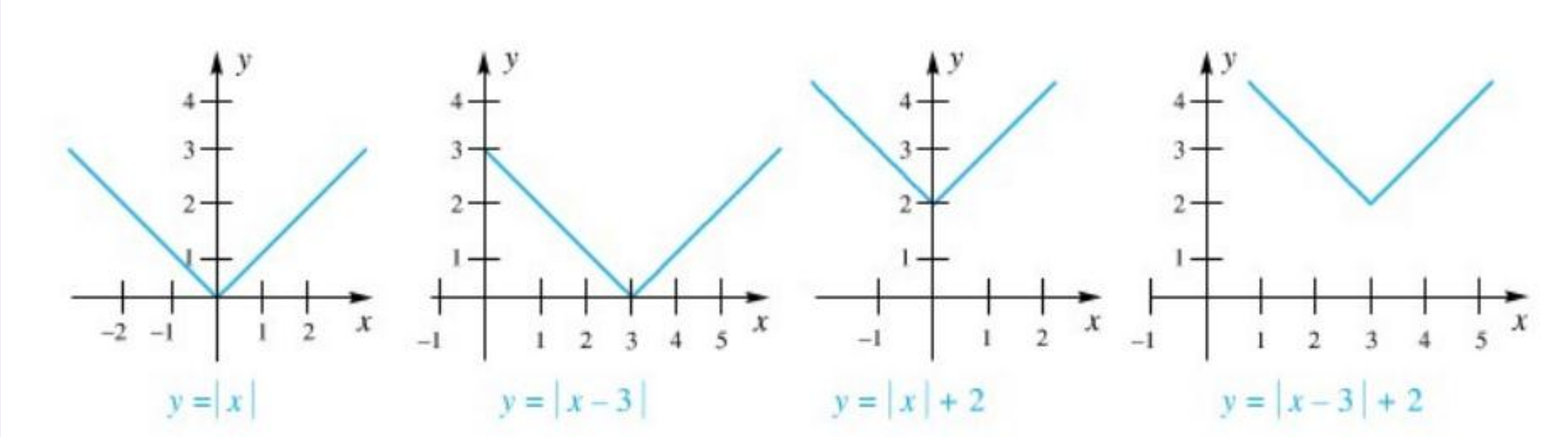
Menggeser grafik sejauh k ke atas

Menggeser grafik sejauh h ke kanan dan sejauh k ke atas

PERGESERAN GRAFIK FUNGSI

Contoh

$$f(x) = |x|$$



LATIHAN SOAL

Gambarlah grafik berikut dengan terlebih dulu menggambar grafik dasarnya kemudian lakukan translasi untuk menggambar grafik tersebut

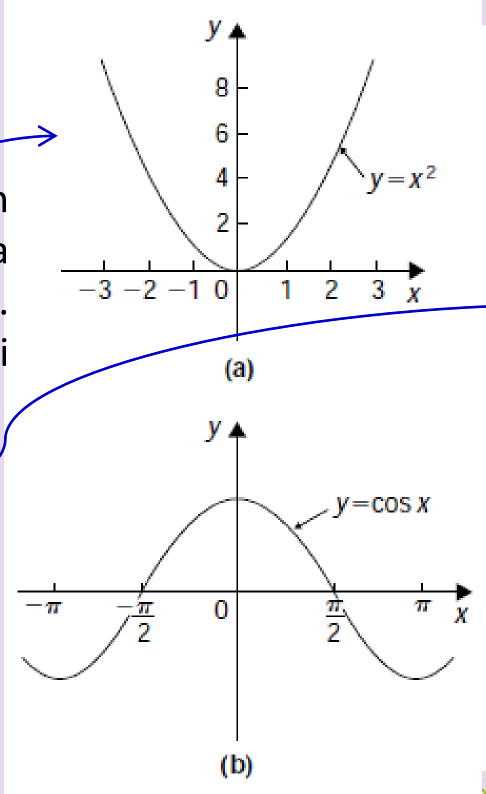
$$f(x) = \sqrt{x+3} + 1$$

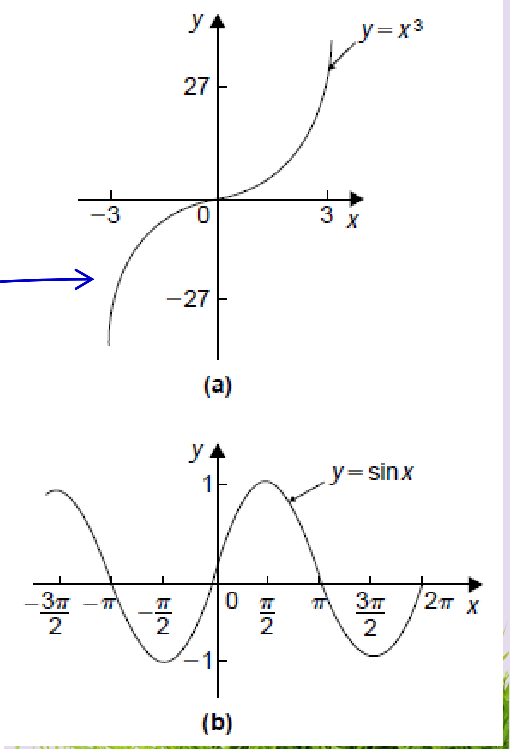
FUNGSI GANJIL DAN GENAP

Fungsi Ganjil Vs Fungsi Genap

Suatu fungsi $y = f(x)$ dikatakan merupakan **fungsi genap** apabila $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ untuk seluruh nilai x. Grafik fungsi genap selalu simetri terhadap sumbu y.

Suatu fungsi $y = f(x)$ dikatakan merupakan **fungsi ganjil** apabila $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$ untuk seluruh nilai x. Grafik fungsi genap selalu simetri terhadap titik pusat (origin). .





FUNGSI GANJIL DAN GENAP

Contoh

Contoh: Periksa apakah fungsi dibawah ini merupakan fungsi genap, ganjil atau bukan keduanya.

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^4 - 3x^2 + 4}$$

Solusi:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 3(-x)}{(-x)^4 - 3(-x)^2 + 4} = \frac{-(x^3 + 3x)}{x^4 - 3x^2 + 4}$$

$$= -f(x)$$

Maka fungsi tersebut adalah fungsi ganjil.

LATIHAN SOAL

Cek fungsi fungsi berikut apakah termasuk fungsi genap, fungsi ganjil atau tidak kedua duanya!

1. $f(x) = -4$
2. $f(x) = 3x$
3. $f(x) = 2x + 1$
4. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$
5. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

FUNGSI PERIODIK DAN APERIODIK

Fungsi Periodik adalah fungsi matematis yang dapat dinyatakan dengan suatu variabel dan memenuhi :

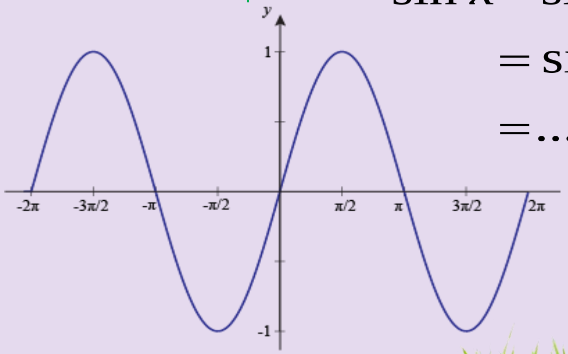
$$\boxed{f\left(x+kT\right)=f\left(x\right) \quad untuk-\infty < x < \infty}$$

dimana k adalah bilangan bulat.
T adalah **periода sinyal**

<u>Contoh:</u>

y = sin *x* adalah fungsi yang periodik terhadap nilai *x* dengan perioda sebesar 2π, karena :

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin\left(x+2\pi\right)\\ &= \sin\left(x+4\pi\right)\\ &= \ldots.\end{aligned}$$



OPERASI PADA FUNGSI

Jumlah: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Selisih: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Hasil kali: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Hasil bagi: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Pangkat: $f^n(x) = [f(x)]^n$

Komposisi Fungsi: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

OPERASI PADA FUNGSI

Contoh

Jika:

$$f(x) = \frac{x-3}{2}, \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

Maka:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-3}{2} + \sqrt{x}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x-3}{2} - \sqrt{x}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x-3}{2}\sqrt{x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-3}{2\sqrt{x}}$$

$$g^3(x) = [g(x)]^3 = \left(\sqrt{x}\right)^3 = x^{3/2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-3}{2}\right) = \sqrt{\frac{x-3}{2}}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

LATIHAN SOAL

Jika $f(x) = x^2 + x$ dan $g(x) = \dfrac{2}{(x+3)}$

Maka carilah :

$a.\ (f - g)(2)$

$b.\ \left(f/g\right)(1)$

$c.\ g^2(3)$

$d.\ f \circ g(1)$

$e.\ g \circ f(1)$

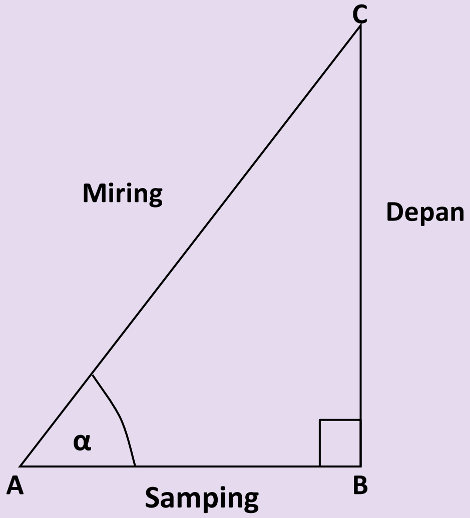
$f.\ g \circ g(3)$

JENIS – JENIS FUNGSI

- Fungsi
  - Fungsi aljabar
    - Fungsi irrasional
    - Fungsi rasional
      - F. Polinom
        - F. Linier
        - F. Kuadrat
        - F. Kubik
        - F. Bikuadrat
      - F.Pangkat
  - Fungsi non-aljabar (transenden)
    - F. Eksponensial
    - F. Logaritmik
    - F. Trigonometrik
    - F. Hiperbolik

FUNGSI TRIGONOMETRI

Kata “**trigonometri**” merupakan gabungan dari kata “tri (tiga), “gonos” (bidang/sisi), dan “metros” (ukuran/ilmu). Secara ethimologi, trigonometri adalah ilmu tentang segitiga (khususnya segitiga siku-siku).

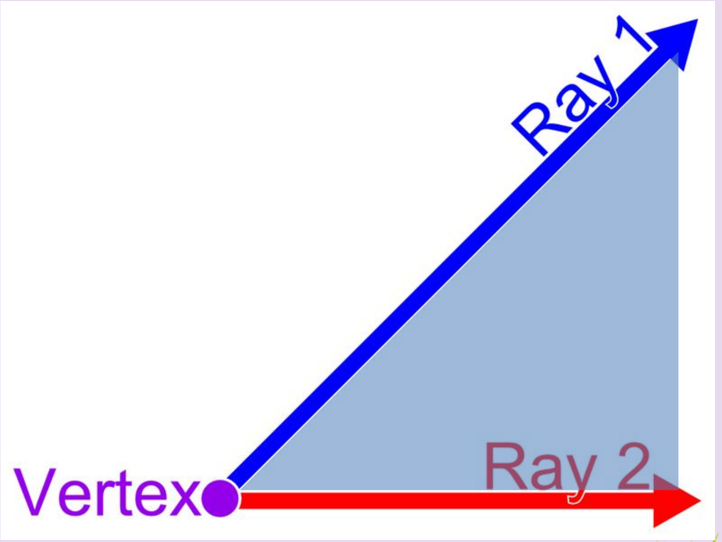


$$\alpha = \text{sudut}$$

FUNGSI TRIGONOMETRI

Sudut

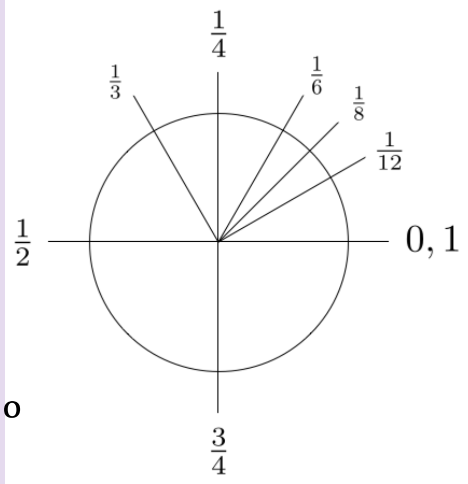
- **Sudut** adalah suatu “bukaan” (unsur geometri) yang dibentuk oleh dua buah sinar dari sebuah titik atau dua buah garis yang bertemu di sebuah titik.
- **Sudut** adalah suatu daerah yang dibentuk dari perputaran sebuah sinar terhadap titik asalnya

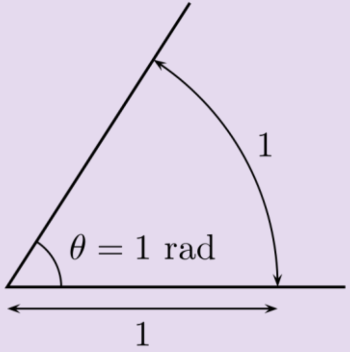


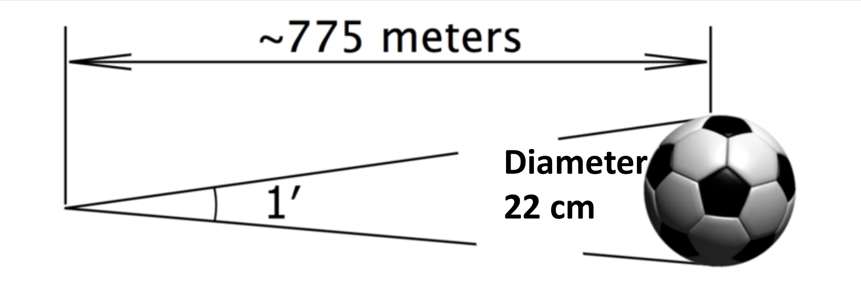
FUNGSI TRIGONOMETRI

Satuan Sudut

- Putaran/Turn
- Degree (º) = $\frac{1}{360}$ turn
- Gradian (grad)= $\frac{1}{400}$ turn = $(\frac{9}{10})^o$
- Radian (rad) = $\frac{1}{2\pi}$ turn = 57,3º
- Menute of arc(‘) = $\frac{1}{21600}$ turn = $(\frac{1}{60})^o$
- Second of arc (“) = $(\frac{1}{60})'$







FUNGSI TRIGONOMETRI

Satuan Sudut

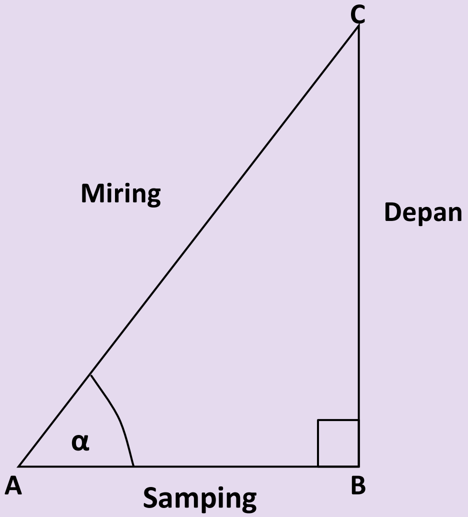
Turns	Radians	Degrees	Gradians (Gons)
0	0	0°	0^g
1/24	π/12	15°	$16\ 2/3^g$
1/12	π/6	30°	$33\ 1/3^g$
1/10	π/5	36°	40^g
1/8	π/4	45°	50^g
1/2π	1	57.3°	63.7^g
1/6	π/3	60°	$66\ 2/3^g$
1/5	2π/5	72°	80^g
1/4	π/2	90°	100^g
1/3	2π/3	120°	$133\ 1/3^g$
2/5	4π/5	144°	160^g
1/2	π	180°	200^g
3/4	3π/2	270°	300^g
1	2π	360°	400^g

LATIHAN SOAL

Putaran	Radians	Degrees	Gradians (Gons)	Menute of Arc
.....	10	.....	.....	.....
1/20	.....	.....	.....	.....
.....	.....	130°	.....	.....
.....	.....	.....	225^g	.....
.....	.....	.....	.....	70’

FUNGSI TRIGONOMETRI

Fungsi Trigonometri pada Segitiga siku-siku



$$\sin\alpha = \frac{\text{depan}}{\text{miring}} = \frac{\text{de}}{\text{mi}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{samping}}{\text{miring}} = \frac{\text{sa}}{\text{mi}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{depan}}{\text{samping}} = \frac{\text{de}}{\text{sa}}$$

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{\text{miring}}{\text{depan}}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{miring}}{\text{samping}}$$

$$\text{cotangent}\,\alpha = \frac{\text{samping}}{\text{depan}}$$

FUNGSI TRIGONOMETRI

Contoh Soal

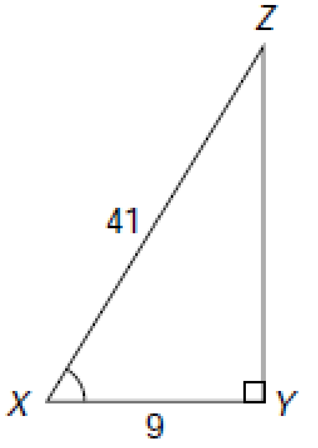
Jika cos X = 9/41, tentukan nilai-nilai perbandingan trigonometri lainnya.

<u>Solusi:</u>

Sudut X dapat digambarkan seperti disamping ini. Karena cos X = 9/41, dapat ditentukan bahwa garis XY = 9 dan garis XZ = 41.

Sehingga, dengan menggunakan teorema Phytagoras, dapat dihitung panjang YZ yaitu:

$$YZ = \sqrt{(41^2 - 9^2)} = 40$$



$$\sin X = \frac{40}{41}, \tan X = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9},$$

$$\operatorname{cosec} X = \frac{41}{40} = 1\frac{1}{40},$$

$$\sec X = \frac{41}{9} = 4\frac{5}{9} \text{ and } \cot X = \frac{9}{40}$$

FUNGSI TRIGONOMETRI

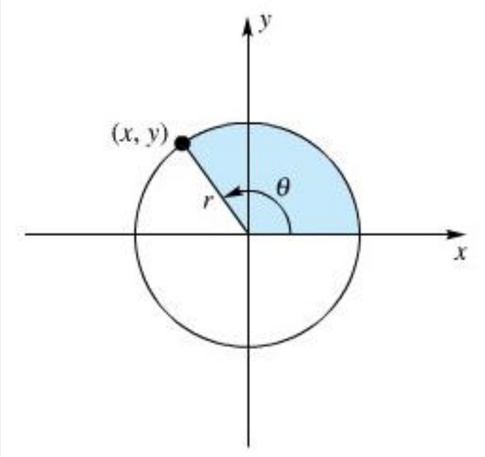
Fungsi Trigonometri pada sistem koordinat

Definisi fungsi trigonometri pada segitiga siku-siku memiliki beberapa kelemahan:

1. Tidak dapat atau sulit mendefinisikan fungsi trig. pada sudut 0^o dan 90^o
2. Untuk sudut yang lebih besar dari 90^o tidak dapat didefinisikan nilai fungsi trig.nya

Maka :

Cara lainnya adalah menggunakan koordinat kartesian dengan pusat di titik sumbu koordinat. Pada cara ini, **sebuah sudut ditentukan oleh sumbu-*x* positif dan ruas garis r (dari titik sumbu ke sebuah titik pada bidang koordinat)**



Sehingga:

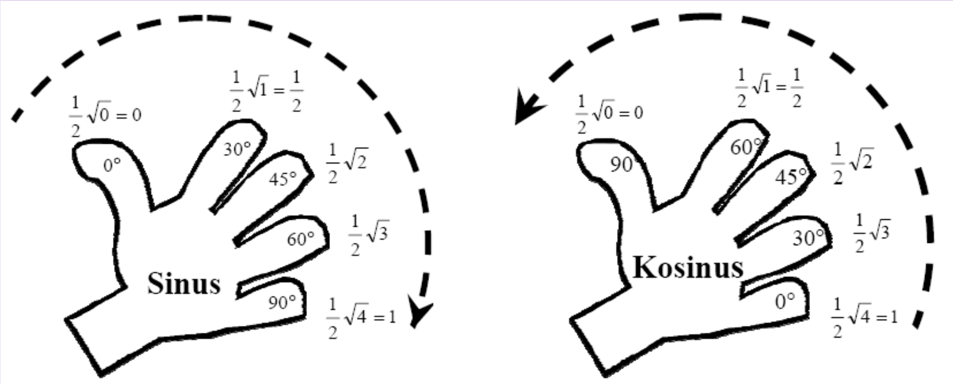
$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

FUNGSI TRIGONOMETRI

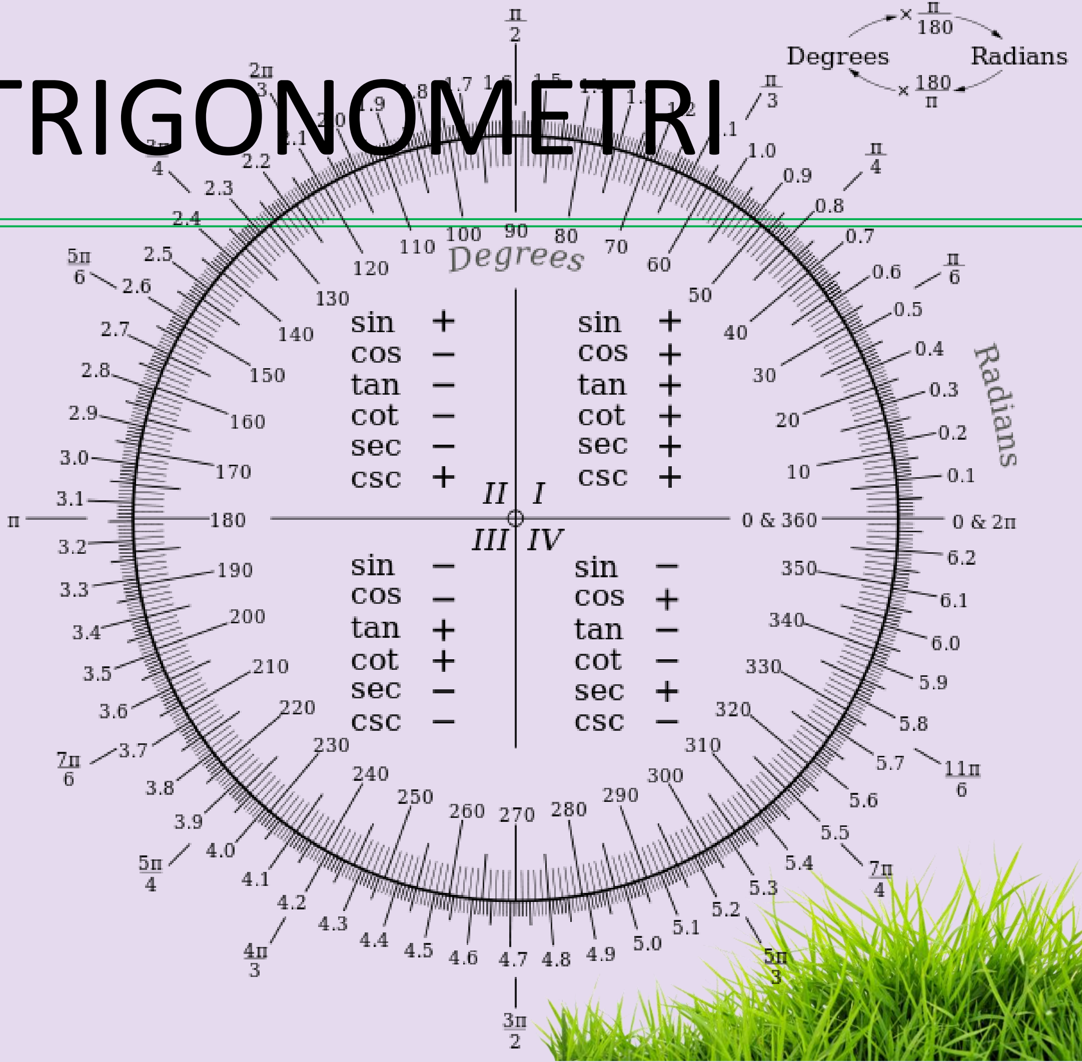
Fungsi Trigonometri untuk sudut istimewa

α	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
Sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0
Cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
Tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	?	0	?	0



FUNGSI TRIGONOMETRI

Fungsi Trigonometri untuk 4 kuadran



LATIHAN SOAL

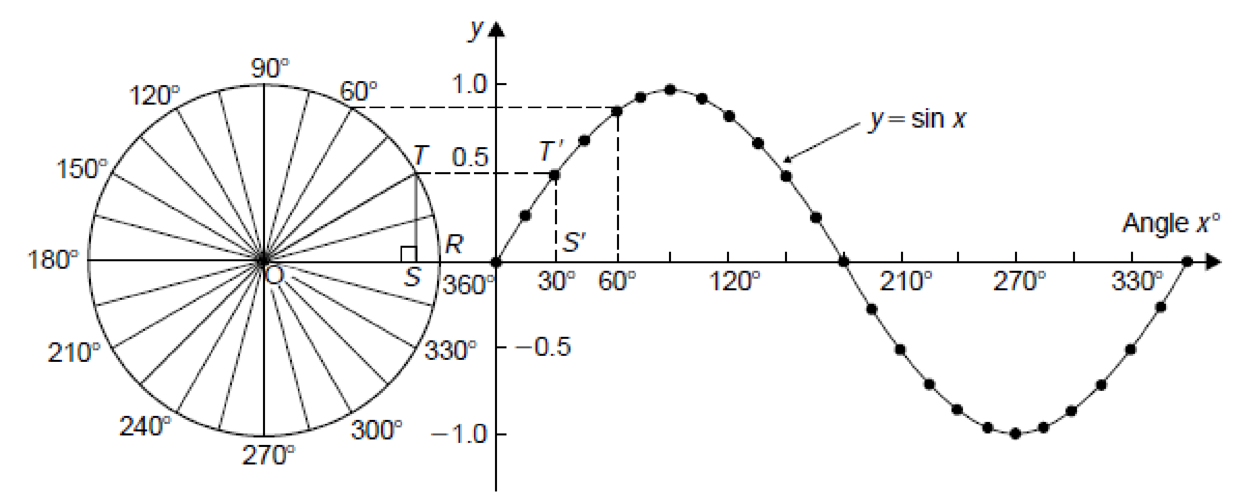
Hitunglah :

1. $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$
2. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
3. $\sin(300°)$
4. $\frac{56{,}4 \tan 34{,}2°}{\sin 34{,}1°}$
5. $\frac{5{,}34 \tan 21{,}3°}{\sin 3{,}1}$

FUNGSI TRIGONOMETRI

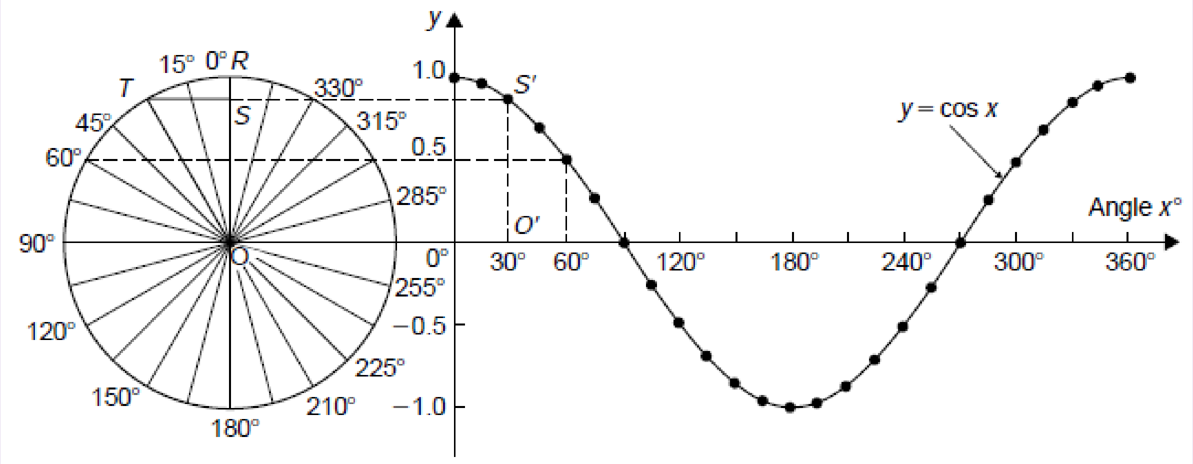
Grafik Fungsi Trigonometri

Pembentukan grafik sinus dan kosinus dapat diandaikan sebagai suatu garis *r* yang bermula pada sumbu x positif pada koordinat kartesian, yang berputar berlawanan arah jarum jam.



FUNGSI TRIGONOMETRI

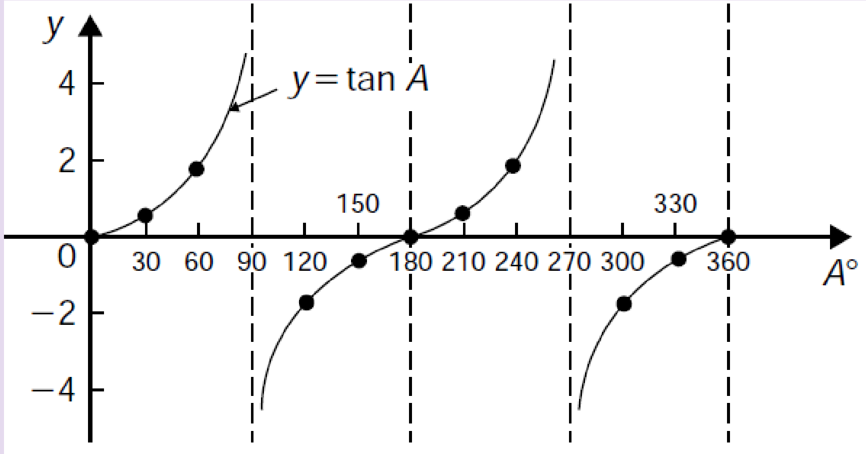
Grafik Fungsi Trigonometri



Grafik kosinus juga dapat dinyatakan sebagai grafik sinus yang mendahului sejauh 90° atau $\pi/2$.

FUNGSI TRIGONOMETRI

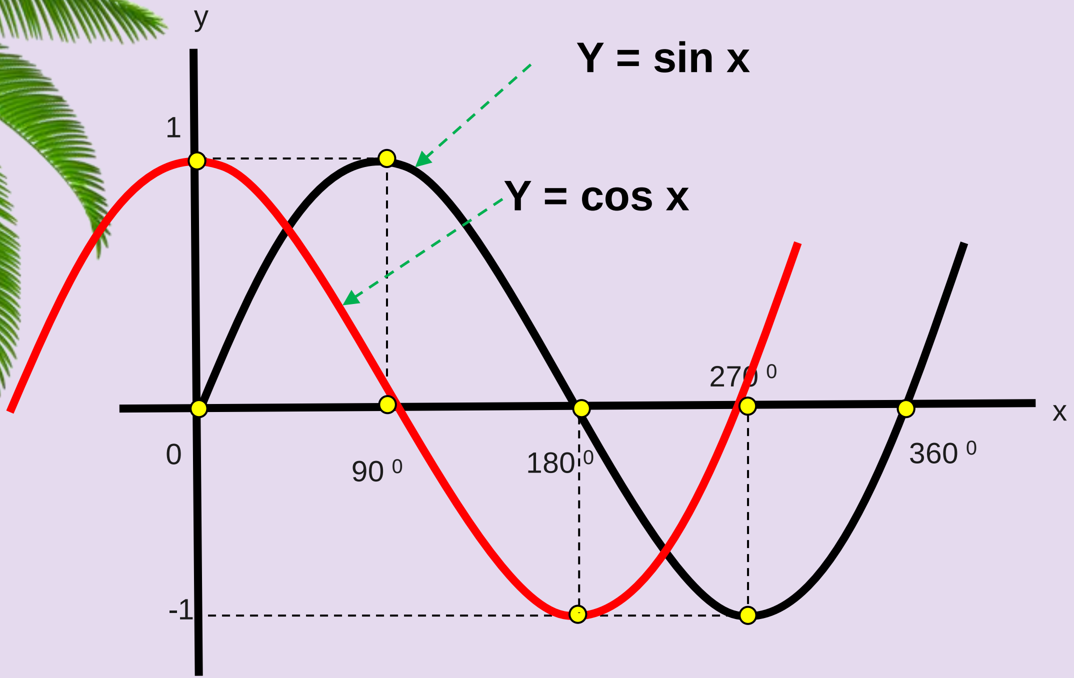
Grafik Fungsi Trigonometri



Tangen adalah perbandingan antara sinus dan kosinus, sehingga grafiknya dapat dibentuk dari perbandingan nilai sin dan cos untuk sudut yang sama. Perlu diperhatikan bahwa pada sudut $\pi/2$ dan $3\pi/2$, nilai cos adalah 0 sehingga nilai tangen menjadi tak terhingga.

FUNGSI TRIGONOMETRI

Amplituda, Perioda, Pergeseran phasa



Amplituda adalah nilai setengah dari jarak vertikal titik tertinggi ke titik terendah dari grafik

Perioda adalah nilai yang menunjukkan titik dimana grafik fungsi mulai berulang

Pergeseran phasa adalah nilai yang menunjukkan besarnya pergeseran grafik ke kanan dan ke kiri (sumbu x)

FUNGSI TRIGONOMETRI

Amplituda, Perioda, Pergeseran phasa

$$y(t) = A\sin(\alpha t + b)$$

$$y(t) = A\cos(\alpha t + b)$$

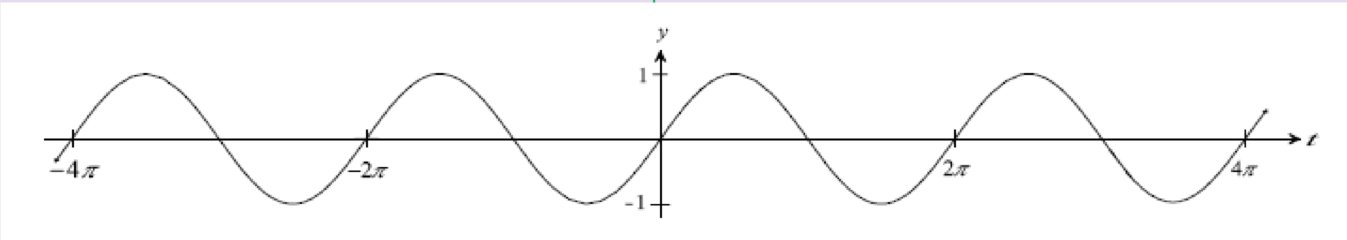
$\lvert A \rvert$	Amplitude
$\dfrac{2\pi}{\lvert\alpha\rvert}$	Periode
b	Phase Shift

<u>Contoh 1:</u>

$y = \sin t \rightarrow T = 2\pi$

alternatif penulisannya :

$y = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ atau $y = \sin(2\pi f t)$



FUNGSI TRIGONOMETRI

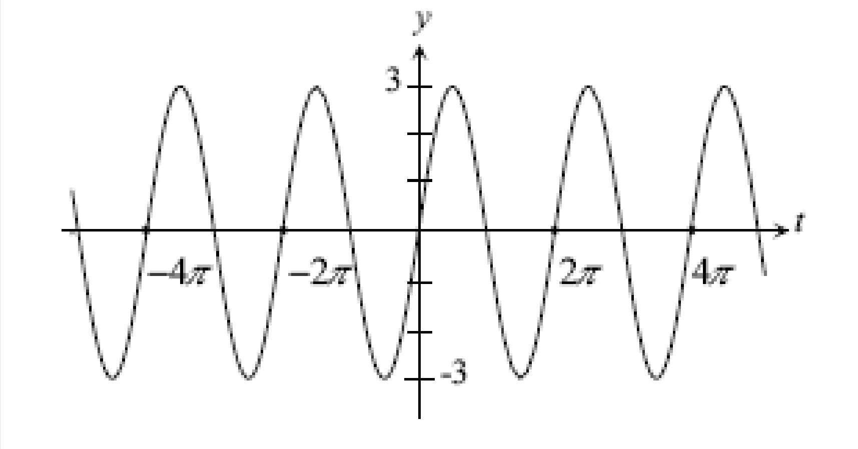
Amplituda, Perioda, Pergeseran phasa

$$y(t) = A\sin(\alpha t + b)$$
$$y(t) = A\cos(\alpha t + b)$$

$\lvert A \rvert$	Amplitude
$\frac{2\pi}{\lvert\alpha\rvert}$	Periode
b	Phase Shift

Contoh 2 : **Perubahan amplitudo**

y = 3 sin *t*



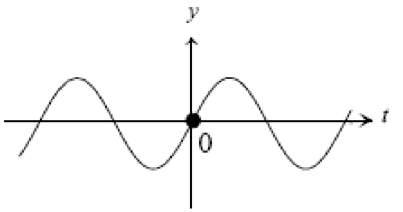
FUNGSI TRIGONOMETRI

Amplituda, Perioda, Pergeseran phasa

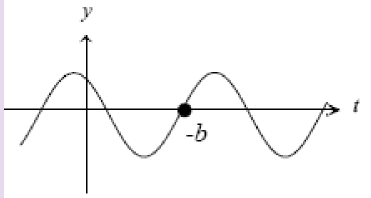
$$y(t) = A\sin(\alpha t + b)$$
$$y(t) = A\cos(\alpha t + b)$$

$\lvert A \rvert$	Amplitude
$\dfrac{2\pi}{\lvert\alpha\rvert}$	Periode
b	Phase Shift

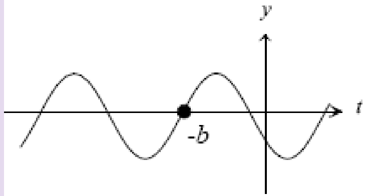
Contoh 3 : **Pergeseran Phase**



(a) $y = \sin t$



(c) $y = \sin(t + b)$, $b < 0$



(b) $y = \sin(t + b)$, $b > 0$

Note: cosine is a shifted sine function:

$$\boxed{\cos(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

FUNGSI TRIGONOMETRI

Amplituda, Perioda, Pergeseran phasa

$$y(t) = A\sin(\alpha t + b)$$
$$y(t) = A\cos(\alpha t + b)$$

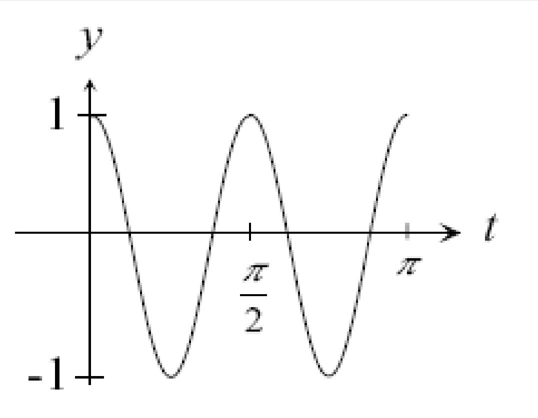
$\lvert A \rvert$	Amplitude
$\dfrac{2\pi}{\lvert\alpha\rvert}$	Periode
b	Phase Shift

Contoh 4: **Perubahan Perioda**

y = Cos 4t → T = $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

alternatif penulisannya :

$y = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ atau $y = \cos(2\pi f t)$



LATIHAN SOAL

Gambarkan grafik fungsi trigonometri berikut pada rentang x = -π sampai x = 2π:

1. $Y = \sin 2x$

2. $Y = 2\sin x$

3. $Y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

PERSAMAAN IDENTITAS TRIGONOMETRI

Odd–even identities

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

Cofunction identities

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

Pythagorean identities

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Addition identities

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

PERSAMAAN IDENTITAS TRIGONOMETRI

Double-angle identities

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$

Half-angle identities

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Sum identities

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Product identities

$$\sin x \sin y = -\tfrac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

LATIHAN SOAL

Jika diketahui

$$\sin x = a, \;\; \cos x = b, \;\; \tan x = c$$

Hitunglah :

1. $Y = 2\sin x$
2. $Y = \sin(-x)$
3. $Y = \sin 2x$
4. $Y = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$
5. $Y = \cos\left(x + 30^\circ\right)$

FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Fungsi Eksponensial

jika $a > 0$ dan $a \neq 1$, dan

$$\boxed{f(x) = a^x}$$

f(x) merupakan **fungsi eksponensial**

Dimana **a** → basis

x → exponent/pangkat

Fungsi Logaritmik

Inverse dari fungsi eksponensial adalah fungsi **Logaritmik**

jika $a > 0$ dan $a \neq 1$, dan

$$\boxed{f(x) = \log_a x}$$

f(x) merupakan **fungsi Logaritmik**

Dimana **a** → basis

dibaca : **Log basis a dari X**

FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Contoh Soal

Jika $f(x) = 2^x$
carilah :

$$f(3)$$

Solusi

$$f(3) = 2^3 = 8$$

Jika $f(x) = \log_2 x$
carilah : $f(8)$

Solusi $f(8) = \log_2 8 = y$

bentuk eksponensial

$$2^y = 8$$

$$2^y = 2^3$$

$$y = 3$$

FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Logarithmic Form	Exponential Form
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_{1/2} 16 = -4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$
$\log_{10} 100{,}000 = 5$	$10^5 = 100{,}000$
$\log_3 \frac{1}{81} = -4$	$3^{-4} = \frac{1}{81}$
$\log_5 5 = 1$	$5^1 = 5$
$\log_{3/4} 1 = 0$	$\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$

FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Sifat-sifat fungsi Eksponensial

1. $a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)}$
3. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
6. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
7. $a^{\frac{x}{y}} = \left(\sqrt[y]{a}\right)^x$

LATIHAN SOAL

1. $$f\left(\frac{3}{4}\right)=16^{x}$$

2. $$f\left(-\frac{1}{3}\right)=64^{x}$$

FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Sifat-sifat fungsi Logaritmik

1. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \left(\dfrac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^y = y \log_a x$
4. $\log_a x = \dfrac{\log_y x}{\log_y a}$
5. $\log_a 1 = 0$ dan $\log_a a = 1$

LATIHAN SOAL

1. $$f\left(\sqrt[3]{7}\right) = \log_{49} x$$

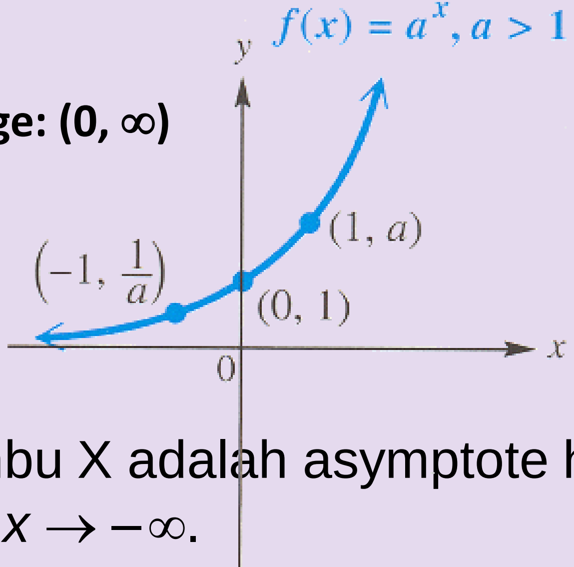
2. $$f\left(x\right) = \log_{4} x = \frac{5}{2}$$, Carilah nilai x

FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Grafik Fungsi Eksponensial

Domain: (–∞, ∞)

Range: (0, ∞)



$f(x) = 2^x$:

x	$f(x)$
–2	¼
–1	½
0	1
1	2
2	4
3	8

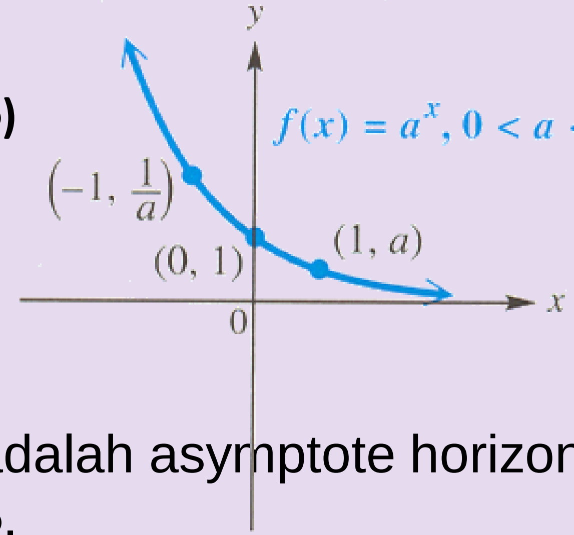
- sumbu X adalah asymptote horizontal saat $x \to -\infty$.
- Grafik melalui titik titik berikut

$$\left(-1, \frac{1}{a}\right), \ (0,1), \ \text{and} \ (1,a).$$

FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Grafik Fungsi Eksponensial

Domain: (–∞, ∞) **Range: (0, ∞)**



$f(x) = (½)^x$:

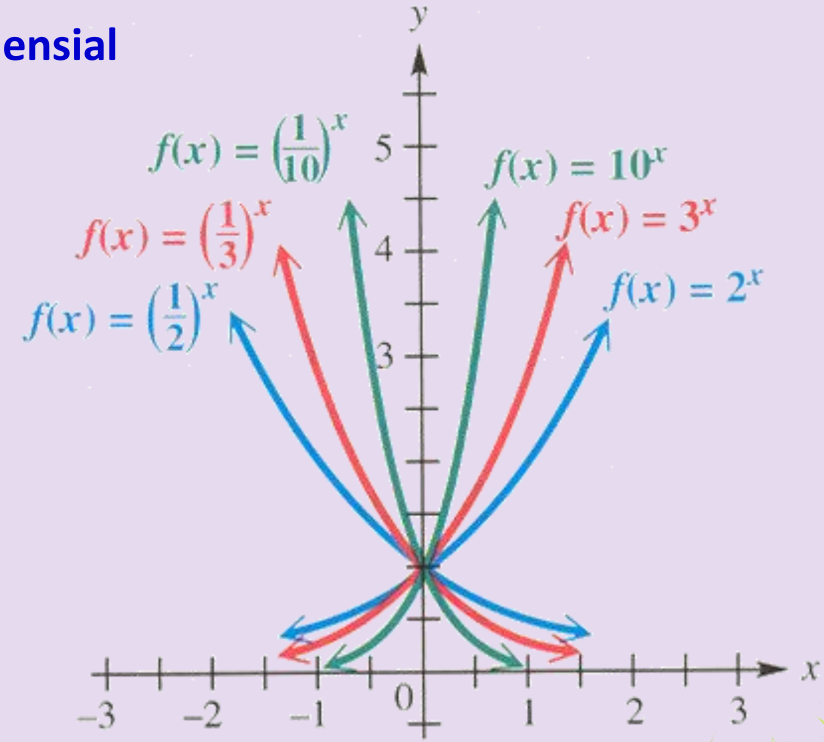
x	$f(x)$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	½
2	¼

- sumbu X adalah asymptote horizontal saat $x \to \infty$.
- Grafik melalui titik titik berikut

$$\left(-1, \frac{1}{a}\right), \ (0,1), \ \text{and} \ (1, a).$$

FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Grafik Fungsi Eksponensial



$f(x) = a^x$

LATIHAN SOAL

Gambarkan Grafik berikut :

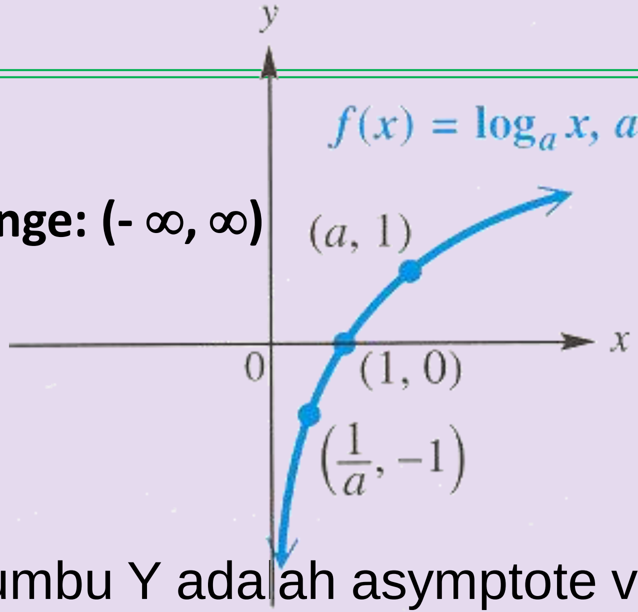
1. $f\left(x\right)=5^{x}$
2. $f\left(x\right)=-5^{x}$
3. $f\left(x\right)=5^{x+3}$
4. $f\left(x\right)=5^{x}+3$

FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Grafik Fungsi Logaritmik

Domain: (0, ∞)

Range: (- ∞, ∞)



$f(x) = \log_2 x$:

x	$f(x)$
¼	−2
½	−1
1	0
2	1
4	2
8	3

- Sumbu Y adalah asymptote vertikal saat $x \to 0$ dari kanan
- Grafik melalui titik - titik berikut

$$\left(\frac{1}{a}, -1\right), (1,0), \text{ and } (a,1).$$

FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

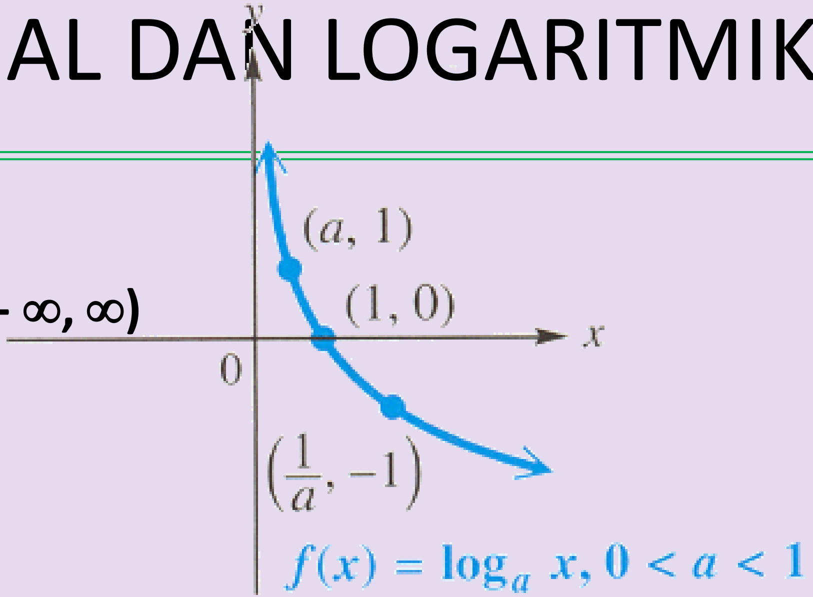
Grafik Fungsi Logaritmik

Domain: (0, ∞)

Range: (- ∞, ∞)

$f(x) = \log_{1/2} x$:

x	$f(x)$
¼	2
½	1
1	0
2	−1
4	−2
8	−3



- Sumbu Y adalah asymptote vertikal saat $x \to 0$ dari kanan
- Grafik melalui titik - titik berikut

$$\left(\frac{1}{a}, -1\right), (1,0), \text{ and } (a,1).$$

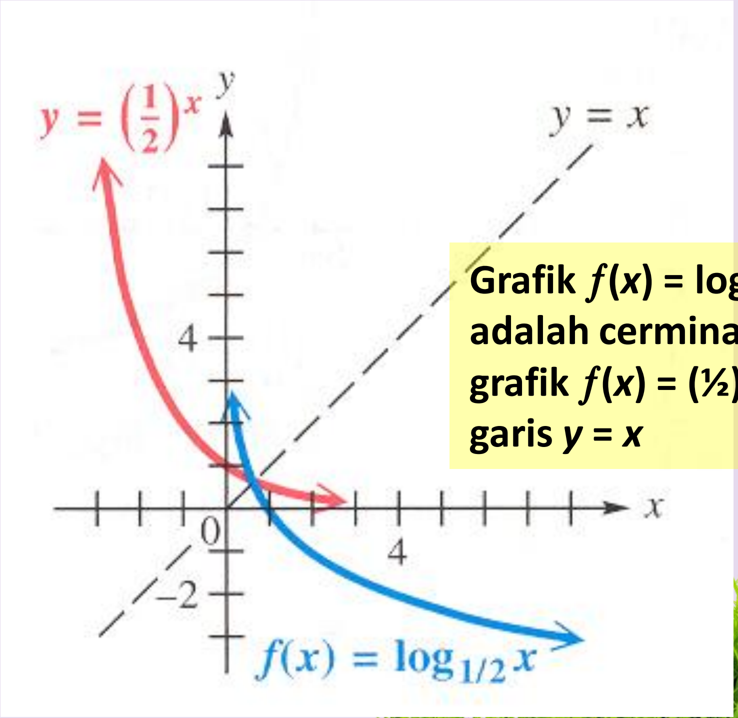
FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Grafik Fungsi Logaritmik Vs Fungsi Eksponensial

$$f(x) = \log_{1/2} x$$

$$f(x) = (½)^x$$

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$f(x) = y = \log_{1/2} x$
-2	4	undefined
-1	2	undefined
0	1	undefined
1	$\frac{1}{2}$	0
2	$\frac{1}{4}$	-1
4	$\frac{1}{16}$	-2



Grafik $f(x) = \log_{1/2} x$ adalah cerminan dari grafik $f(x) = (½)^x$ pada garis $y = x$

LATIHAN SOAL

Gambarkan Grafik berikut :

1. $f(x) = \log_2(x-1)$
2. $f(x) = (\log_3 x) - 1$

FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Common Logarithm dan Natural Logarithm

$$f(x) = \log_{10} x = \log x \longrightarrow$$ f(x) disebut **common Logaritmik**

$$f(x) = \log_e x = \ln x \longrightarrow$$ f(x) disebut **Natural Logaritmik**

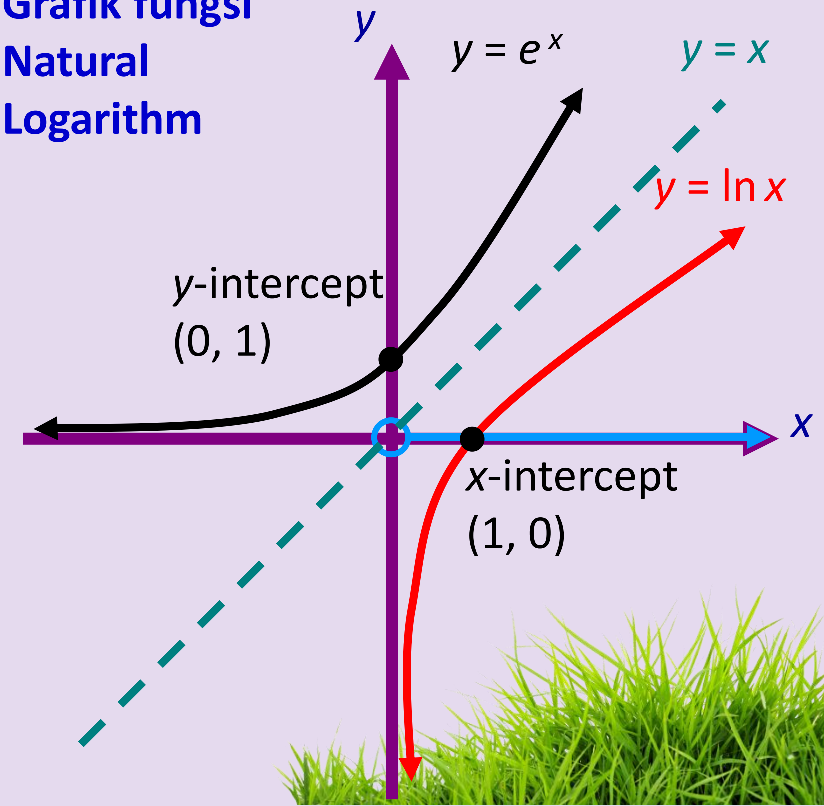
e →disebut konstanta matematika
atau **konstanta euler** ($e \approx 2.718281\ldots$)

FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Sifat Natural Logarithm

1. **ln 1 = 0** karena $e^0 = 1$.
2. **ln *e* = 1** karena $e^1 = e$.
3. **ln e^x = x** and **$e^{\ln x}$ = x**

Grafik fungsi Natural Logarithm



FUNGSI HYPERBOLIC

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$
$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$
+

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}}$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$
$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$
-

$$\boxed{\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}}$$

Jika $\theta = jx$ $\rightarrow$ $\cos jx = \frac{e^{jjx} + e^{-jjx}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2}$

$$\boxed{\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}}$$

$\rightarrow$ Disebut **Cosinus Hyperbolic** ***/Hyperbolic Cosine***

FUNGSI HYPERBOLIC

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Disebut **Cosinus Hyperbolic** ***/Hyperbolic Cosine***

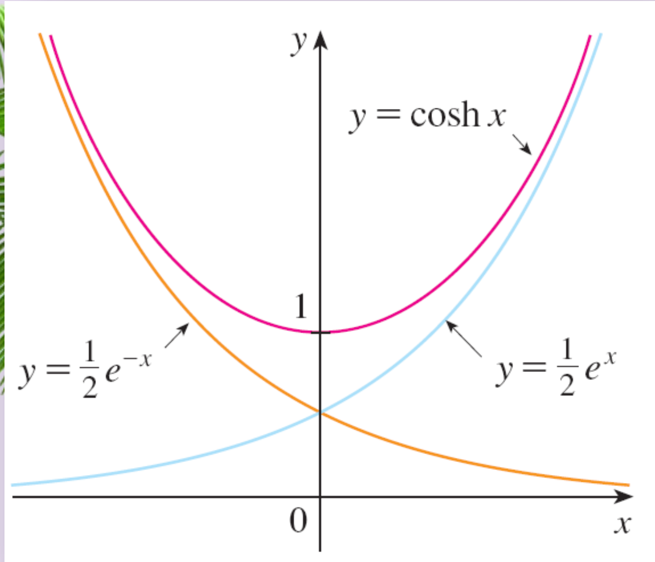
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

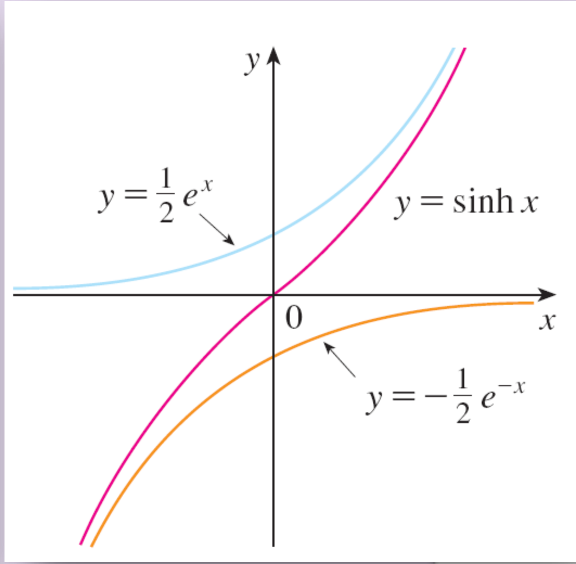
Disebut **Sinus Hyperbolic** ***/Hyperbolic Sine***

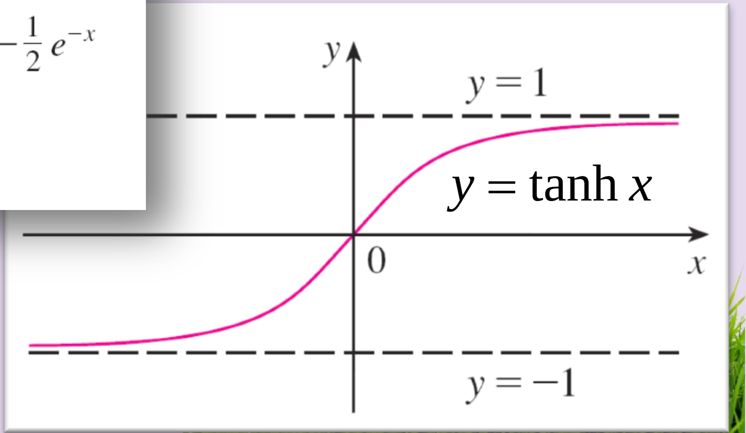
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Disebut **Tangen Hyperbolic** ***/Hyperbolic Tangent***

FUNGSI HYPERBOLIC







FUNGSI HYPERBOLIC

Contoh Soal

$$f\left(x\right)=\sinh x$$

Cari *f(1,275)*

$$f\left(1{,}275\right)=\sinh 1{,}275$$

$$=\frac{e^{1,275}-e^{-1,275}}{2}$$

$$=\frac{3{,}579-0{,}279}{2}=1{,}65$$

FUNGSI HYPERBOLIC

Sifat Hyperbolic

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\sinh(jx) = j\sin x$$

$$\cosh(jx) = \cos x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

Thank you!