Telkom University

Diploma of Telecommunication Engineering

DTH1B3 - MATEMATIKA TELEKOMUNIKASI I

Limit dan Kekontinuan

By : Dwi Andi Nurmantris

CAPAIAN PEMBELAJARAN

- Mampu memahami limit fungsi baik sifat-sifat limit fungsi dan memahami kekontinuan dari suatu fungsi.

MATERI PEMBELAJARAN

- Limit
- Kekontinuan

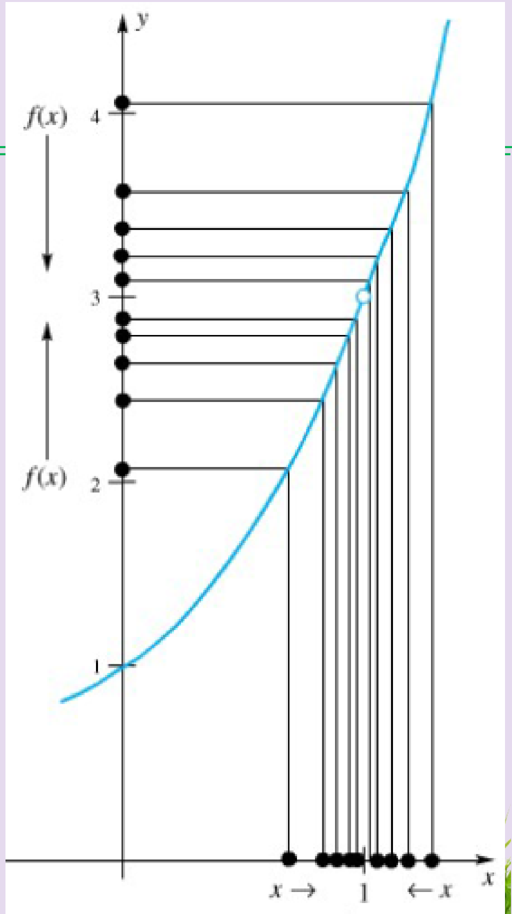
DEFINISI LIMIT

Perhatikan fungsi berikut ini.

$$f(x) = \frac{X^3 - 1}{X - 1}$$

Fungsi tersebut tidak terdefinisi pada $x = 1$ karena dititik ini $f(x)$ berbentuk 0/0. Tetapi kita dapat mengamati nilai-nilai $f(x)$ untuk x mendekati 1.

x	$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
↓	↓
1.000	?
↑	↑
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313



Graph of $y = f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

DEFINISI LIMIT

Dari tabel dan grafik tersebut, kita dapat mengambil kesimpulan bahwa *f(x)* mendekati 3 bilamana *x* mendekati 1. Dalam lambang matematis kita tuliskan:

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3}$$

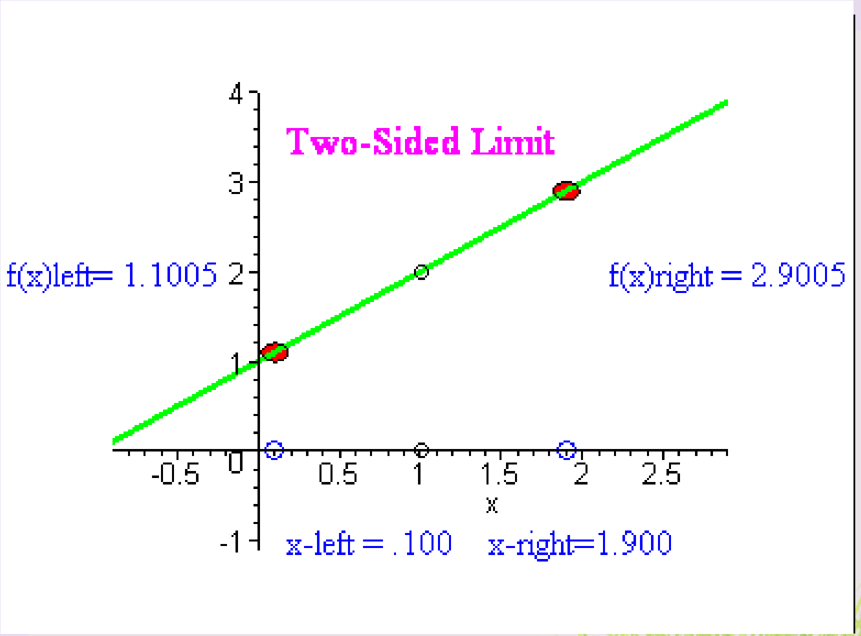
Dibaca:

"limit dari $f(x) = \frac{X^3 - 1}{X - 1}$ **ketika x cenderung menuju ke nilai 1 adalah 3."**

DEFINISI LIMIT

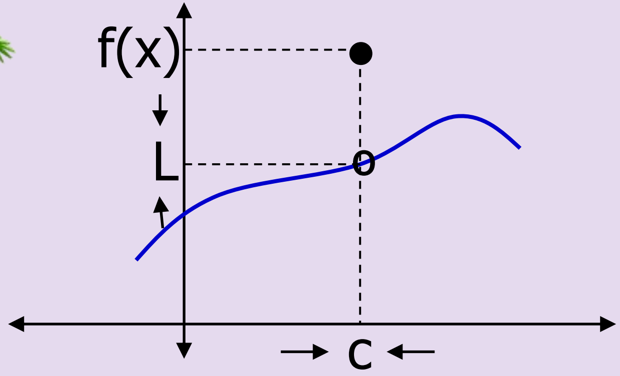
$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Artinya : bila *x* dekat tetapi tidak sama dengan *c*, maka *f(x)* dekat ke *L* ."



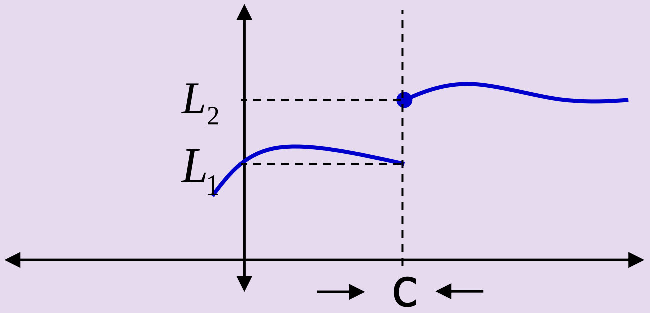
DEFINISI LIMIT

Limit Kiri dan Limit Kanan



Jika x menuju c dari arah kiri (dari arah bilangan yang lebih kecil dari c, limit disebut **limit kiri**,

Notasi → $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$



Jika x menuju c dari arah kanan (dari arah bilangan yang lebih besar dari c, limit disebut **limit kanan**,

Notasi → $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$

Jika :

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

maka :

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Jika :

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$$

maka :

$$\lim_{x \to c} f(x) \to \text{tidak ada}$$

DEFINISI LIMIT

Limit Kiri dan Limit Kanan

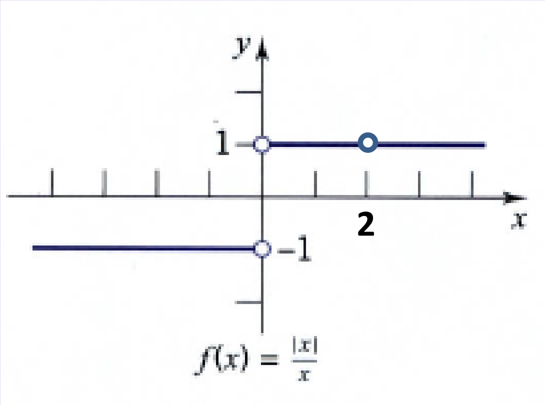
Contoh Soal

Carilah Limit dari fungsi berikut!

a. $\lim_{x\to 2} \frac{x}{|x|}$ b. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, Jika } x > 0 \\ -1 & \text{, Jika } x < 0 \end{cases}$$

a.



$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{|x|} = 1 \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{|x|} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{x}{|x|} = 1$$

DEFINISI LIMIT

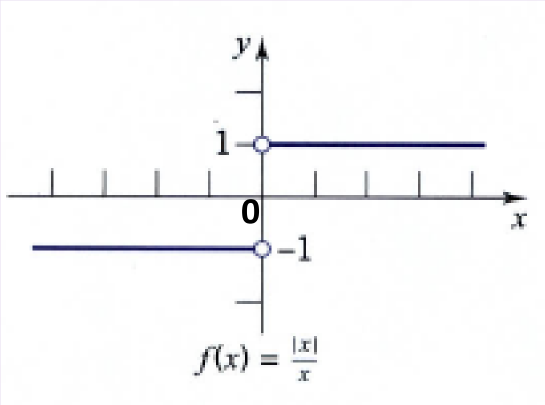
Limit Kiri dan Limit Kanan

Contoh Soal

Carilah Limit dari fungsi berikut!

$$\text{a. } \lim_{x \to 2} \frac{x}{|x|} \qquad \text{b. } \lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$$

b.



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, Jika } x > 0 \\ -1 & \text{, Jika } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} \neq \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|} = \text{tidak ada}$$

METODE MENCARI LIMIT FUNGSI

1. Substitusi Langsung (Coba cara ini pertama kali)
2. Jika cara substitusi langsung gagal, maka tulis kembali dengan mencari fungsi yang setara dengan fungsi aslinya, Kemudian gunakan cara subtitusi langsung. Metoda ini meliputi…
   - Faktorisasi.
   - Rasionalisasi/Mengalikan dengan bilangan sekawan.
   - Membagi dengan variabel pangkat tertinggi.
   - Menggunakan fungsi identitas
   - Cara lain yang legal

METODE MENCARI LIMIT FUNGSI

Teorema Substitusi

Jika f suatu fungsi polinom atau fungsi rasional, maka

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

asalkan dalam kasus fungsi rasional, nilai penyebut di c **tidak nol.**

METODE MENCARI LIMIT FUNGSI

Contoh 1

Carilah Limit dari fungsi berikut!

$$\lim_{x \to 2} x^3$$

Solusi

$$\lim_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$$

Metode Substitusi langsung

METODE MENCARI LIMIT FUNGSI

Contoh 2

Carilah Limit dari fungsi berikut!

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)}{(x-3)}$$

Solusi

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)}{(x-3)}=\frac{0}{0}$$

Metode Substitusi langsung gagal

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)}{(x-3)}=\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}$$

$$=x+3$$

$$=3+3=6$$

Metode Faktorisasi

METODE MENCARI LIMIT FUNGSI

Contoh 3

Carilah Limit dari fungsi berikut!

$$\lim_{y\to 2}\frac{\sqrt{y+2}-2}{y-2}$$

Solusi

$$\lim_{y\to 2}\frac{\sqrt{y+2}-2}{y-2}=\frac{\sqrt{2+2}-2}{2-2}=\frac{0}{0}$$

Metode Substitusi langsung gagal

$$\lim_{y\to 2}\frac{\sqrt{y+2}-2}{y-2}\cdot\frac{\sqrt{y+2}+2}{\sqrt{y+2}+2}$$

Kalikan dengan bilangan sekawan→rasionalisasi pembilang

$$=\lim_{y\to 2}\frac{(y+2)-4}{(y-2)\left(\sqrt{y+2}+2\right)}$$

$$=\lim_{y\to 2}\frac{\cancel{y-2}}{\cancel{(y-2)}\left(\sqrt{y+2}+2\right)}$$

Coret faktor yang sama

$$=\lim_{y\to 2}\frac{1}{\sqrt{y+2}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2+2}+2}=\frac{1}{4}$$

Lakukan Substitusi Langsung

METODE MENCARI LIMIT FUNGSI

Contoh 4

Carilah Limit dari fungsi berikut!

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{x^2 + 3x - 2}$$

Solusi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{x^2 + 3x - 2} = \frac{?}{?}$$

Metode Substitusi langsung gagal

Bagi dengan variable pangkat tertinggi → bagi dengan x^2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{x^2 + 3x - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - 2/x + 5/x^2}{1 + 3/x - 2/x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3 - 2/\infty + 5/\infty^2}{1 + 3/\infty - 2/\infty^2}$$

$$= \frac{3 - 0 + 0}{1 + 0 - 0}$$

$$= 3$$

Lakukan Substitusi Langsung

METODE MENCARI LIMIT FUNGSI

Contoh 5

Carilah Limit dari fungsi berikut!

$$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x-3}$$

Solusi

$$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x-3} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}}{3-3} = \frac{0}{0}$$

Metode Substitusi langsung gagal

$$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x-3} \cdot \frac{3x}{3x} = \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{(x-3)3x}$$

Kalikan pembilang dan penyebut dengan 3x

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)}{(x-3)3x}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}3x}$$

Coret Faktor yang sama

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-1}{3x}$$

Lakukan Substitusi Langsung

$$= \frac{-1}{3\cdot 3} = -\frac{1}{9}$$

LATIHAN SOAL

1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

2. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

3. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, dimana $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \leq 0 \\ x \, , & 0 < x < 1 \\ 2 + x^2 \, , & x \geq 1 \end{cases}$

SIFAT-SIFAT LIMIT

1. $\lim\limits_{x\to c} k = k$ 2. $\lim\limits_{x\to c} x = c$ 3. $\lim\limits_{x\to c} kf\left(x\right) = k\lim\limits_{x\to c} f\left(x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x)$

5. $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)g(x)\right] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \lim\limits_{x\to c} g(x)$

6. $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$, bila $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$

7. $\lim\limits_{x\to c}(f(x))^n = (\lim\limits_{x\to c} f(x))^n$

8. $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$, bila $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$ dan n genap

SIFAT-SIFAT LIMIT

Contoh 1

Carilah Limit dari fungsi berikut!

$$\lim_{x \to 3} 2x^4$$

Solusi

$$\lim_{x \to 3} 2x^4 = 2\lim_{x \to 3} x^4 = 2\left(\lim_{x \to 3} x\right)^4 = 2(3)^4 = 162$$

SIFAT-SIFAT LIMIT

Contoh 2

Carilah Limit dari fungsi berikut!

$$\lim_{x\to 4}\left(3x^2 - 2x\right)$$

Solusi

$$\lim_{x\to 4}\left(3x^2 - 2x\right) = \lim_{x\to 4} 3x^2 - \lim_{x\to 4} 2x = 3\lim_{x\to 4} x^2 - 2\lim_{x\to 4} x$$

$$= 3\left(\lim_{x\to 4} x\right)^2 - 2\lim_{x\to 4} x = 3(4)^2 - 2(4) = 40$$

TEOREMA LIMIT

TEOREMA APIT

Misal $f(x) \le g(x) \le h(x)$ untuk x disekitar/menuju c dan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ serta } \lim_{x \to c} h(x) = L$$

maka

$$\lim_{x \to c} g(x) = L$$

SIFAT-SIFAT LIMIT

Contoh

Carilah Limit dari fungsi berikut!

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2 \sin\frac{1}{x-1}$$

Solusi

Karena $-1 \le \sin(\frac{1}{x-1}) \le 1$

$$-(x-1)^2 \le (x-1)^2 \sin\frac{1}{x-1} \le (x-1)^2$$

$$-(x-1)^2 \le (x-1)^2 \sin\frac{1}{x-1} \le (x-1)^2$$

$$\lim_{x\to 1} -(x-1)^2 = 0 \quad , \lim_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$$

Maka dengan **teorema Apit**

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2 \sin\frac{1}{x-1} = 0$$

KEKONTINUAN FUNGSI

Fungsi ***f*(*x*)** dikatakan **kontinu** pada suatu titik ***x* = *c*** jika

(i) f(c) ada

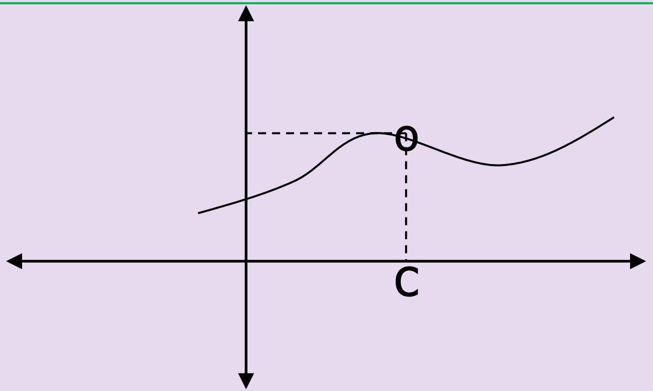
(ii) $\lim_{x \to c} f(x)$ ada

(iii) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Jika salah satu syarat tersebut tidak terpenuhi, maka ***f(x)*** **tidak kontinu di *c*.**

KEKONTINUAN FUNGSI

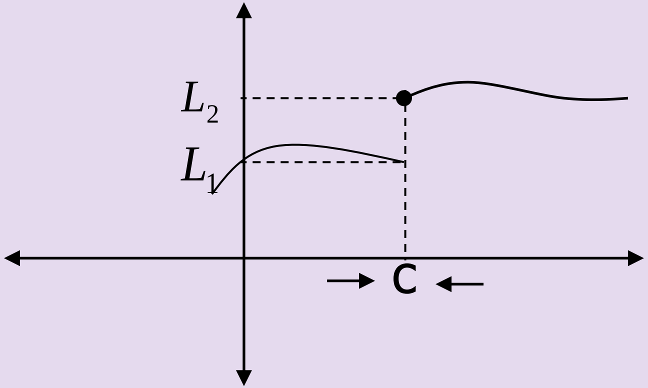
(i)



f(c) tidak ada

[**f(x) tidak kontinu di x=c**]()

(ii)

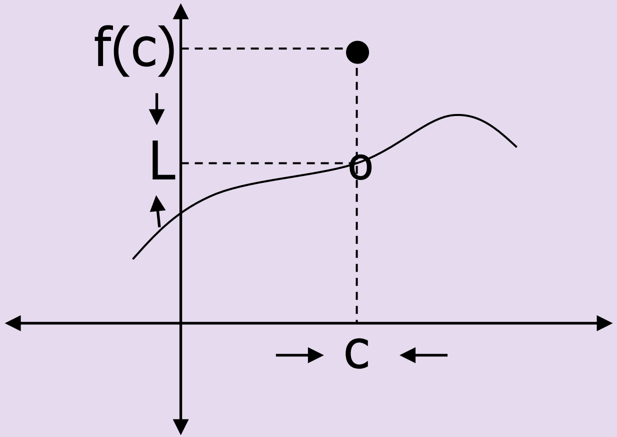


Karena limit kiri(L1) tidak sama dengan limit kanan(L2) maka f(x) tidak mempunyai limit di x=c

Fungsi f(x) tidak kontinu di x=c

KEKONTINUAN FUNGSI

(iii)



f(c) ada $\lim_{x\to c} f(x)$ ada

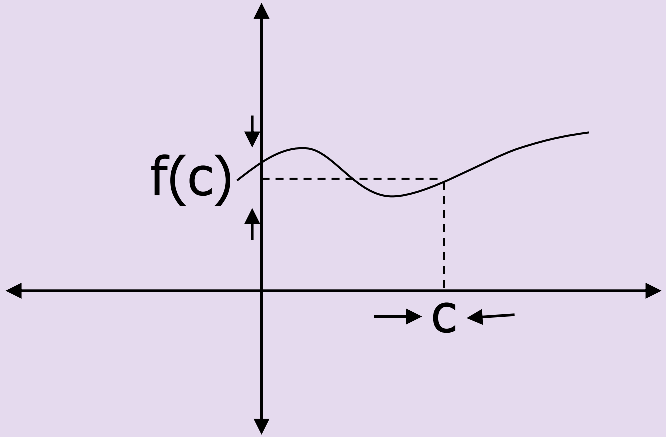
Tapi nilai fungsi tidak sama dengan limit fungsi

$$\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$$

Fungsi f(x) tidak kontinu di x=c

KEKONTINUAN FUNGSI

(iv)



f(c) ada $\qquad \lim_{x \to c} f(x)$ ada

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

f(x) kontinu di x=c

LATIHAN SOAL

Periksa apakah fungsi berikut kontinu di x=2, jika tidak sebutkan alasannya

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ x^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases}$

TEOREMA KEKONTINUAN

TEOREMA 1

Jika fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ kontinu di c, maka demikian juga:

1. $kf(x)$
2. $f(x) + g(x)$
3. $f(x) - g(x)$
4. $f(x) \cdot g(x)$
5. $f(x)/g(x)$ asalkan $g(c)$ tidak nol
6. $f(x)^n$
7. $\sqrt[n]{f(x)}$ asalkan $f(c) > 0$ jika n genap

TEOREMA KEKONTINUAN

TEOREMA 2 (Limit Komposit)

Jika $g(x)$ kontinu di *c*

dan $f(x)$ kontinu di *g(c)*,

maka fungsi komposit $f \circ g$ kontinu di c.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to c} g(x) = g(c) \\ \lim\limits_{x \to g(c)} f(x) = f(g(c)) \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to c} f \circ g(x) = f \circ g(c)$$

TEOREMA KEKONTINUAN

Contoh

Apakah $h(x) = \left| x^2 - 3x + 6 \right|$ kontinu di x = 2

solusi

Misalkan $f(x) = |x|$ dan $g(x) = x^2 - 3x + 6$

fungsi $g(x)$ kontinu di x=2

fungsi $f(x)$ kontinu di x = g(2) = 4

Maka

fungsi $h(x) = \left| x^2 - 3x + 6 \right|$ kontinu di x = 2

TEOREMA KEKONTINUAN

TEOREMA 3 (Kontinu kanan dan Kontinu Kiri)

Fungsi f(x) disebut **kontinu kiri** di x=c jika

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

Fungsi f(x) disebut **kontinu kanan** di x=c jika

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

Fungsi f(x) kontinu di x=c jika kontinu kiri dan kontinu kanan di x=c

TEOREMA KEKONTINUAN

TEOREMA 4 (Kekontinuan pada suatu interval)

- Fungsi $f(x)$ dikatakan **kontinu pada interval buka** **(a,b)** bila $f(x)$ kontinu pada setiap titik di dalam interval tersebut.
- Sedangkan $f(x)$ dikatakan **kontinu pada interval tutup** **[a,b]** bila :

1. $f(x)$ kontinu pada (a,b)
2. $f(x)$ kontinu kanan di $x = a$
3. $f(x)$ kontinu kiri di $x = b$

TEOREMA KEKONTINUAN

TEOREMA 5 (Kekontinuan nilai antara)

Jika $f(x)$ kontinu pada $[a, b]$

dan jika w sebuah bilangan antara $f(a)$ dan $f(b)$,

Maka:

terdapat sebuah bilangan c di antara a dan b sedemikian sehingga $f(c) = w$.

Thank you!