


DTH1B3 - MATEMATIKA TELEKOMUNIKASI I

Turunan Fungsi

By : Dwi Andi Nurmantris




CAPAIAN PEMBELAJARAN

- Mampu memahami definisi turunan, aturan dasar turunan dan mampu mencari turunan dari berbagai bentuk fungsi.
- 

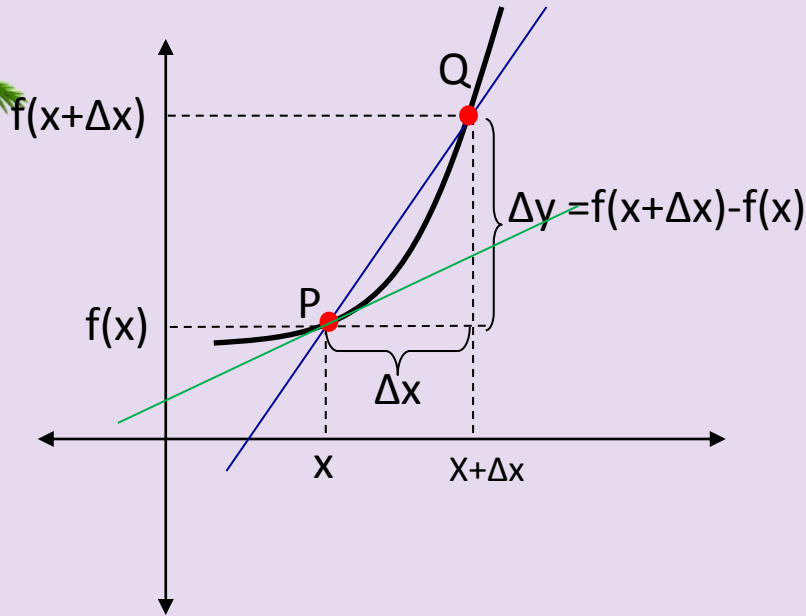


MATERI PEMBELAJARAN

Turunan Fungsi

- a. Definisi Turunan dan Differensial
 - b. Aturan Dasar Turunan
 - c. Turunan Fungsi
 - d. Turunan Tingkat Tinggi
- 

DEFINISI TURUNAN DAN DIFERENSIAL



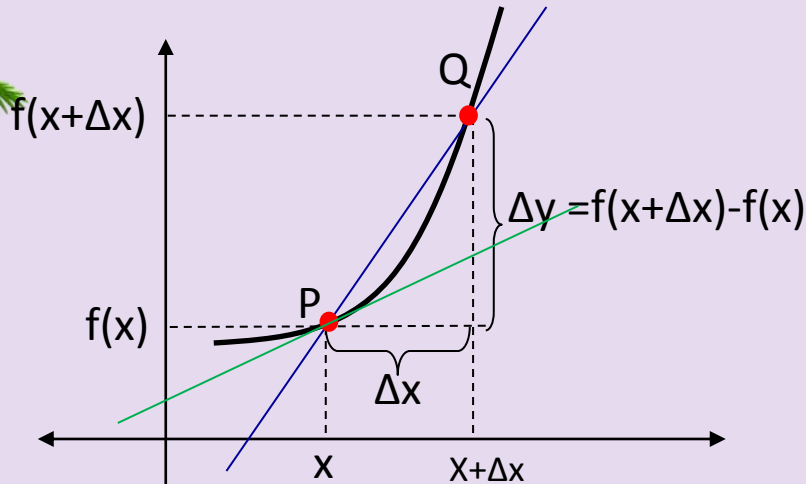
Kemiringan garis PQ (titik potong pada busur PQ) adalah :

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Jika $\Delta x \rightarrow 0$, maka garis PQ akan berubah menjadi **garis singgung** di titik P dgn kemiringan

$$m = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

DEFINISI TURUNAN DAN DIFERENSIAL



Mencari perubahan y terhadap perubahan x

dy = deferensial dari variabel y
 dx = deferensial dari variabel x

$$m = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- $\frac{dy}{dx} \Rightarrow$
- Disebut **Turunan Fungsi** dari $f(x)$
 - Biasanya ditulis dengan **$f'(x)$** (dibaca "f(x) aksen")

Mencari Gradien Garis Singgung pada suatu titik pada fungsi

DEFINISI TURUNAN DAN DIFERENSIAL

Contoh :

Jika $f(x) = x^2$, tentukan $f'(x)$

Jawab :

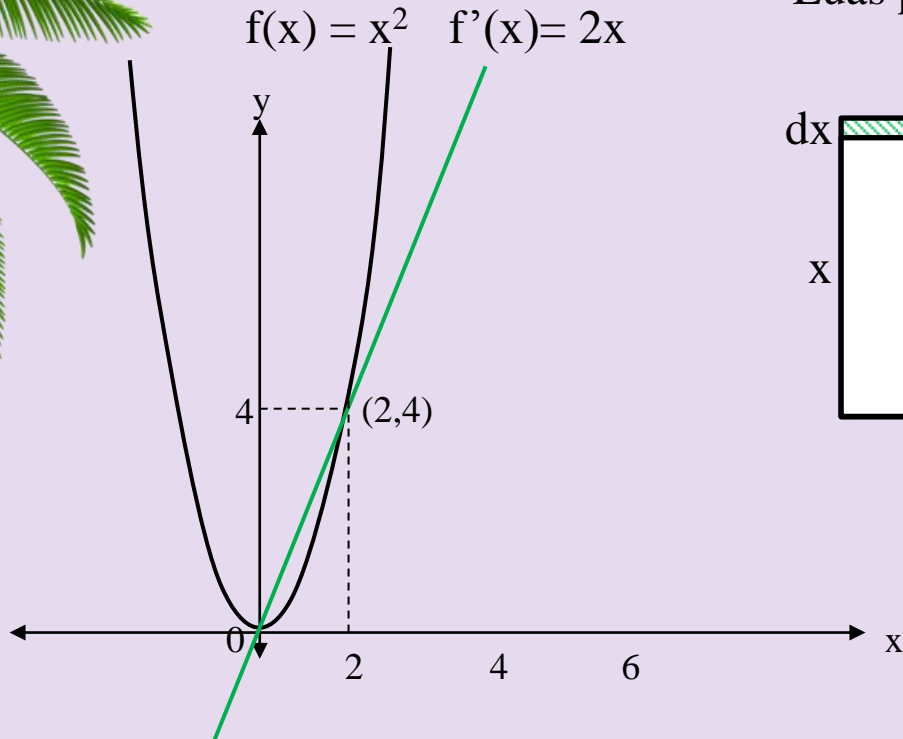
$$f(x) = x^2$$

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= (x + \Delta x)^2 \\ &= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 \end{aligned}$$

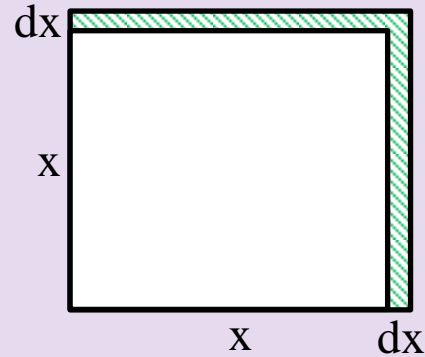
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x \\ &= 2x + 0 \\ &= 2x \end{aligned}$$

DEFINISI TURUNAN DAN DIFERENSIAL

Ilustrasi tambahan

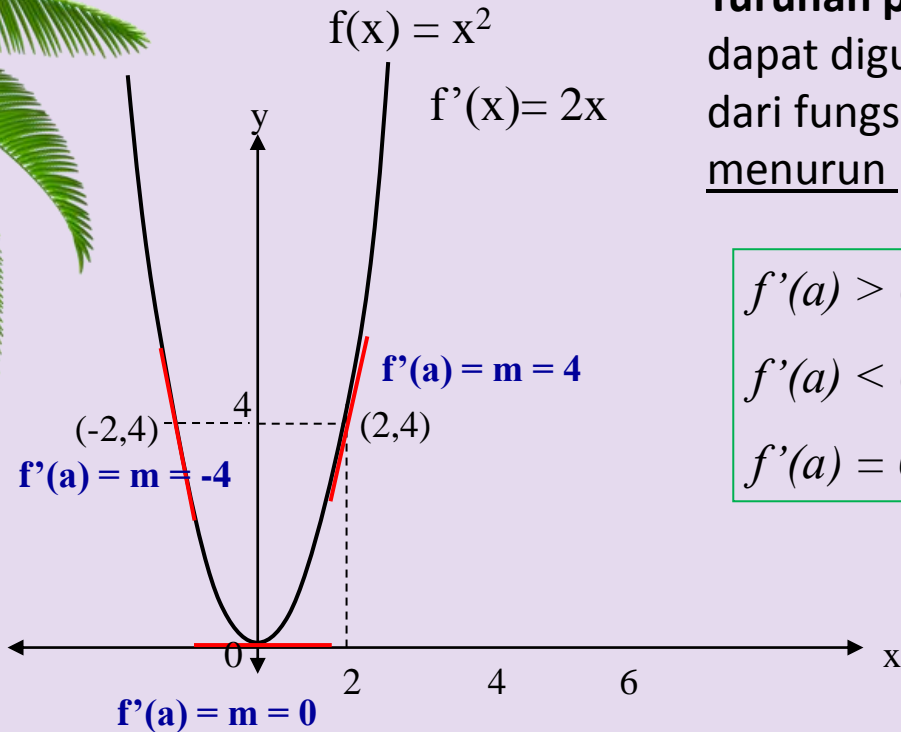


Luas persegi = $f(x) = y = x^2$



DEFINISI TURUNAN DAN DIFERENSIAL

Hakekat dari Turunan



Turunan pertama dari sebuah fungsi non-linear dapat digunakan untuk menentukan apakah kurva dari fungsi yang bersangkutan menaik atau menurun pada kedudukan tertentu.

$f'(a) > 0$, maka $f(x)$ menaik

$f'(a) < 0$, maka $f(x)$ menurun

$f'(a) = 0$, titik ekstrim (maksimum/minimum)

ATURAN TURUNAN FUNGSI

TEOREMA 1

FUNGSI KONSTAN

Jika $f(x) = k$ dengan k konstan
maka :

$$f'(x) = 0$$

BUKTI:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k - k}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0 \quad (\text{Terbukti}) \end{aligned}$$

ATURAN TURUNAN FUNGSI

TEOREMA 2

FUNGSI IDENTITAS

Jika $f(x) = x$,
maka $f'(x) = 1$

BUKTI:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1 \quad (\text{Terbukti}) \end{aligned}$$

ATURAN TURUNAN FUNGSI

TEOREMA 3

FUNGSI PANGKAT

Jika $f(x) = x^n$ dan n bilangan rasional,
maka:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

ATURAN TURUNAN FUNGSI

Contoh :

Carilah Turunan fungsi dari fungsi - fungsi berikut :

a. $f(x) = x^3$

b. $f(x) = x^{100}$

c. $f(x) = 5x^{50}$

SOLUSINYA: a. $f(x) = x^3$, $n = 3$ maka $f'(x) = nx^{n-1} = 3x^{3-1} = 3x^2$

b. $f(x) = x^{100}$, $n = 100$, maka $f'(x) = nx^{n-1} = 100x^{100-1} = 100x^{99}$

c. $f(x) = 5x^{50}$, $n = 50$, maka $f'(x) = nx^{n-1} = 5.50x^{50-1} = 250x^{49}$

LATIHAN SOAL

Tentukan Turunan dari fungsi - fungsi berikut :

a. $f(x) = 4$

b. $f(x) = x^5$

c. $f(x) = x^{-3}$

d. $f(x) = x^{10}$

e. $f(x) = x^{-2}$

f. $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$

ATURAN TURUNAN FUNGSI

TEOREMA 4

HASIL KALI KONSTANTA DENGAN FUNGSI

Jika f suatu fungsi, c suatu konstanta, dan g fungsi yang didefinisikan oleh $g(x) = c \cdot f(x)$ dan $f'(x)$ ada, maka :

$$g'(x) = c \cdot f'(x)$$

ATURAN TURUNAN FUNGSI

Contoh :

Tentukan Turunan fungsi $f(x)$ berikut :

a. $f(x) = 5x^{50}$

b. $f(x) = 100x^{90}$

c. $f(x) = \frac{6}{5}x^{55}$

SOLUSINYA: a. $f(x) = 5x^{50}$, $f'(x) = 5 \cdot g'(x)$
 $= 5 \cdot 50x^{49}$

$$= 250x^{49}$$

b. $f(x) = 100x^{90}$, $f'(x) = 100 \cdot g'(x)$
 $= 100 \cdot 90x^{89}$
 $= 9000x^{89}$

c. $f(x) = \frac{6}{5}x^{55}$, $f'(x) = \frac{6}{5} \cdot g'(x)$
 $= \frac{6}{5} \cdot 55x^{54}$
 $= 66x^{54}$

ATURAN TURUNAN FUNGSI

TEOREMA 5

JUMLAH DUA FUNGSI

Jika U dan V adalah fungsi - fungsi dari x yang dapat diturunkan dan $y = f(x) = U(x) + V(x)$, maka $y' = f'(x) = U'(x) + V'(x)$

ATURAN TURUNAN FUNGSI

TEOREMA 6

SELISIH DUA FUNGSI

Jika U dan V adalah fungsi - fungsi dari x yang dapat diturunkan dan $y = f(x) = U(x) - V(x)$, maka

$$y' = f'(x) = U'(x) - V'(x)$$

ATURAN TURUNAN FUNGSI

Contoh :

Tentukan Turunan dari $f(x) = 6x^2 - 7x + 2$

SOLUSINYA:

$$\begin{aligned} f(x) = 6x^2 - 7x + 2 &\Leftrightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}(6x^2) - \frac{d}{dx}(7x) + \frac{d}{dx}(2) \\ &= 6 \frac{d}{dx}(x^2) - 7 \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2) \\ &= 6 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 \\ &= 12x - 7 \end{aligned}$$

LATIHAN SOAL

CARILAH TURUNAN FUNGSI - FUNGSI BERIKUT :

a. $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 5x$

b. $f(x) = (6 - 2x)^2$

c. $f(x) = 2x^2 + \frac{2}{x^2}$

ATURAN TURUNAN FUNGSI

TEOREMA 7

PERKALIAN DUA FUNGSI.

Jika U dan V fungsi - fungsi dari x
yang dapat diturunkan dan $f(x) = U(x).V(x)$,
maka $f'(x) = U'(x).V(x) + U(x).V'(x)$

ATURAN TURUNAN FUNGSI

Contoh :

Carilah turunan pertama dari $f(x) = (3x^2 - 2)(x^4 + x)$

SOLUSINYA :

Misalkan $U(x) = 3x^2 - 2$ dan $V(x) = x^4 + x$

$$U'(x) = 6x \quad \text{dan} \quad V'(x) = 4x^3 + 1$$

Masukan ke dalam teorema 7 didapat :

$$\begin{aligned} f'(x) &= U(x) \cdot V'(x) + U'(x) \cdot V(x) \\ &= (3x^2 - 2) \cdot (4x^3 + 1) + (6x)(x^4 + x) \\ &= 12x^5 - 8x^3 + 3x^2 - 2 + 6x^5 + 6x^2 \\ &= 18x^5 - 8x^3 + 9x^2 - 2 \end{aligned}$$

ATURAN TURUNAN FUNGSI

TEOREMA 8

PEMBAGIAN DUA FUNGSI.

Jika U dan V fungsi - fungsi dari x yang dapat diturunkan,

dan $f(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$, $V(x) \neq 0$, maka

$$f'(x) = \frac{U'(x) \cdot V(x) - U(x) \cdot V'(x)}{[V(x)]^2}$$

ATURAN TURUNAN FUNGSI

Contoh :

Carilah turunan dari

$$f(x) = \frac{3x^2 + 10}{x^3 + 9}$$

SOLUSINYA :

$$\text{Misalkan } U(x) = 3x^2 + 10 \Leftrightarrow U'(x) = 6x$$

$$V(x) = x^3 + 9 \Leftrightarrow V'(x) = 3x^2$$

Berdasarkan Teorema 8 didapat :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{U'(x) \cdot V(x) - U(x) \cdot V'(x)}{[V(x)]^2} \\ &= \frac{(6x)(x^3 + 9) - (3x^2 + 10) \cdot (3x^2)}{(x^3 + 9)^2} \\ &= \frac{6x^4 + 54x - 9x^4 - 30x^2}{(x^3 + 9)^2} \\ &= \frac{-3x^4 - 30x^2 + 54x}{(x^3 + 9)^2} \end{aligned}$$

LATIHAN SOAL

Hitunglah Turunan Fungsi - fungsi berikut :

a. $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{(5x + 2)^{-1}}$

b. $f(x) = \frac{3 - \frac{1}{x}}{x + 5}$

ATURAN TURUNAN FUNGSI

TEOREMA 9

DALIL RANTAI

Jika $v = f(u)$ merupakan fungsi dari u yang dapat diturunkan dan $u = g(x)$ merupakan fungsi dari x yang dapat diturunkan serta $y = f \circ g(x) = f(g(x))$ merupakan fungsi dari x yang dapat diturunkan maka :

$$y'(x) = \frac{d}{dx} (f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

atau
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ATURAN TURUNAN FUNGSI

Contoh :

Tentukan Turunan dari :

$$y = (4x^2 - 5x + 3)^6$$

SOLUSINYA:

$$U = 4x^2 - 5x + 3 \text{ maka } y = U^6$$

$$\frac{dy}{du} = 6U^5 = 6(4x^2 - 5x + 3)^5$$

$$\frac{du}{dx} = 8x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \quad = 6(4x^2 - 5x + 3)^5 \cdot 8x - 5$$

$$\Leftrightarrow \quad = (48x - 30)(4x^2 - 5x + 3)^5$$




LATIHAN SOAL

Tentukan Turunan fungsi berikut :

a. $f(x) = \sqrt{7x^2 - 2x + 5}$

b. $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^{\frac{3}{2}}$



TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

$$y = \cos \sec x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\cos \sec x \cdot \cot x$$

$$y = \sec x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \sec x \cdot \tan x$$

$$y = \cot x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\cos \sec^2 x$$

TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

Contoh :

Tentukan Turunan dari fungsi-fungsi berikut:

1. $f(x) = 4\sin x - 2\cos x$

2. $f(x) = 2\sin x \cos x$

SOLUSINYA

1. $f(x) = 4\sin x - 2\cos x$

$$f'(x) = 4 \cdot d\sin x - 2 \cdot d\cos x \\ = 4\cos x + 2\sin x$$

2. $f(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$

$$f'(x) = d2x \cdot d\sin 2x \\ = 2\cos 2x$$

LATIHAN SOAL

Tentukan Turunan Fungsi - fungsi berikut :

1. $y = 2\sin x + 4\cos 2x$

2. $y = 1 - \sin^2 x$

3. $y = -2\sin^2 x + 1$

4. $y = \cos^2 x + \sin^2 x$

5. $y = 4\cos^2 x - 4$

TURUNAN FUNGSI HYPERBOLIC

$$y = \sinh x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \cosh x$$

$$y = \cosh x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \sinh x$$

$$y = \tanh x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2 x$$

$$y = \operatorname{cosech} x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosech} x \cdot \coth x$$

$$y = \operatorname{sech} x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$$

$$y = \coth x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosech}^2 x$$

LATIHAN SOAL

Tentukan Turunan Fungsi - fungsi berikut :

a. $y = \sinh (x^2 - 3)$

b. $y = x \sinh x - \cosh x$

c. $y = (x - 1) \cosh x$

TURUNAN FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

$$y = a^x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = a^x \ln a$$

$$y = e^x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$y = \log_e x = \ln x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

TURUNAN FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Contoh :

Tentukan Turunan Fungsi berikut :

$$f(x) = x^7 - x^5 + e^3 - x + e^x$$

SOLUSINYA

$$\begin{aligned} f'(x) &= 7x^6 - 5x^4 + 0 - 1 + e^x \\ &= 7x^6 - 5x^4 - 1 + e^x \end{aligned}$$

TURUNAN FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Contoh :

Tentukan Turunan Fungsi berikut :

$$f(x) = 10x^3 - 100 \ln x$$

SOLUSINYA

$$f(x)' = 30x^2 - 100 \left(\frac{1}{x} \right) = 30x^2 - \frac{100}{x}$$

LATIHAN SOAL

Tentukan Turunan Fungsi - fungsi berikut :

a. $y = \ln x^5 + e^x - \ln e^2$

b. $y = x^{10} + 10^x$

c. $y = \log_2 x - 6\log_5 x$

TURUNAN TINGKAT TINGGI

Turunan dari turunan

- Setiap fungsi bisa diturunkan lebih dari 1 kali (tergantung derajatnya).
- Turunan pertama (turunan dari fungsi awal), turunan kedua (turunan dari fungsi turunan pertama, dst).
- Turunan Kedua, Ketiga, Keempat dst disebut **Turunan Tingkat Tinggi**

contoh :

$$y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 7$$

$$y' = dy / dx = 3x^2 - 8x + 5$$

$$y'' = d^2 y / dx^2 = 6x - 8$$

$$y''' = d^3 y / dx^3 = 6$$

$$y^{(4)} = d^4 y / dx^4 = 0$$

TURUNAN TINGKAT TINGGI

TURUNAN	NOTASI f'	NOTASI LEIBNIZ
Turunan Pertama	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$
Turunan Kedua	$f''(x)$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$
Turunan Ketiga	$f'''(x)$	$\frac{d^3 y}{dx^3}$
Turunan Keempat	$f^{(4)}(x)$	$\frac{d^4 y}{dx^4}$
...
Turunan Ke-n	$f^{(n)}(x)$	$\frac{d^n y}{dx^n}$

LATIHAN SOAL

Tentukan turunan kedua dari

1. $y = \sin(2x - 1)$

2. $y = (2x - 3)^4$

3. $y = \frac{x}{x + 1}$

4. $y = \cos^2(\pi x)$



Thank you!

