Telkom University

Diploma of Telecommunication Engineering

DTH1B3 - MATEMATIKA TELEKOMUNIKASI I

Integral dan Teknik Integral

By : Dwi Andi Nurmantris

CAPAIAN PEMBELAJARAN

- Mampu memahami integral sebagai anti turunan, dan mampu menentukan hasil integral dari berbagai bentuk fungsi.
- Mampu membedakan penggunaan teknik integral untuk menyelesaikan integral pada fungsi.

MATERI PEMBELAJARAN

Integral

a. Definisi Integral
b. Penyelesaian Integral Fungsi
c. Teknik integral

DEFINISI INTEGRAL

- Kebalikan dari Turunan
  → Anti Turunan
- Kegunaan :
  - Mencari fungsi asal jika diketahui fungsi turunannya
    → integral tak tentu *(indefinite integral)*
  - Menentukan luas bidang dari sebuah kurva yang dibatasi sumbu X
    → integral tentu *(definite integral)*

DEFINISI INTEGRAL

INTEGRAL TAK TENTU

- Nilai domain tidak ditentukan
- Jika Y = F(x) dan Y' = F'(x) = f(x), maka "*integral dari f(x) terhadap X*" :

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$$

Keterangan

$\int$	: tanda integral
f(x)	: integran
F(x)	: fungsi primitif
c	: konstanta

DEFINISI INTEGRAL

Perhatikan tabel berikut:

F(x) $\xrightarrow{\text{Turunan}}$ / $\xleftarrow{\text{Integral}}$ F'(x)	
$3x^2$	6x
$3x^2 + 3$	6x
$3x^2 - 5$	6x
$3x^2 + 5$	6x

Jika konstanta 3,-5 dan 5 adalah C ,maka fungsi F(x) = 3 x^2 + C , dengan notasi integral dapat di tulis

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

DEFINISI INTEGRAL

Contoh :

a. $\int 4x\,dx$ = $2x^2 + C$

b. $\int 3x^2\,dx$ = $x^3 + C$

c. $\int 4x^3\,dx$ = $x^4 + C$

DEFINISI INTEGRAL

INTEGRAL TENTU

- Nilai domainnya ditentukan :

$$\boxed{\int_a^b f(x) = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

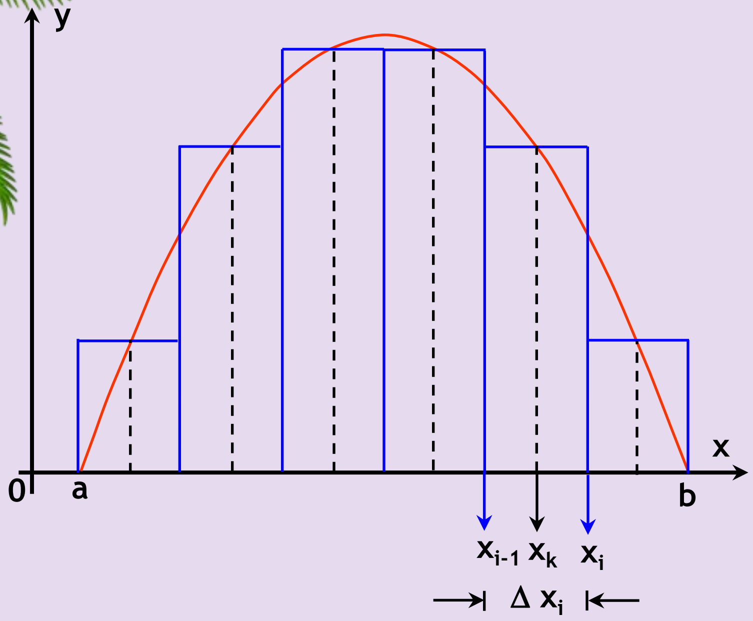
$a \le b$

a : batas bawah

b : batas atas

DEFINISI INTEGRAL

Perhatikan gambar di bawah ini!

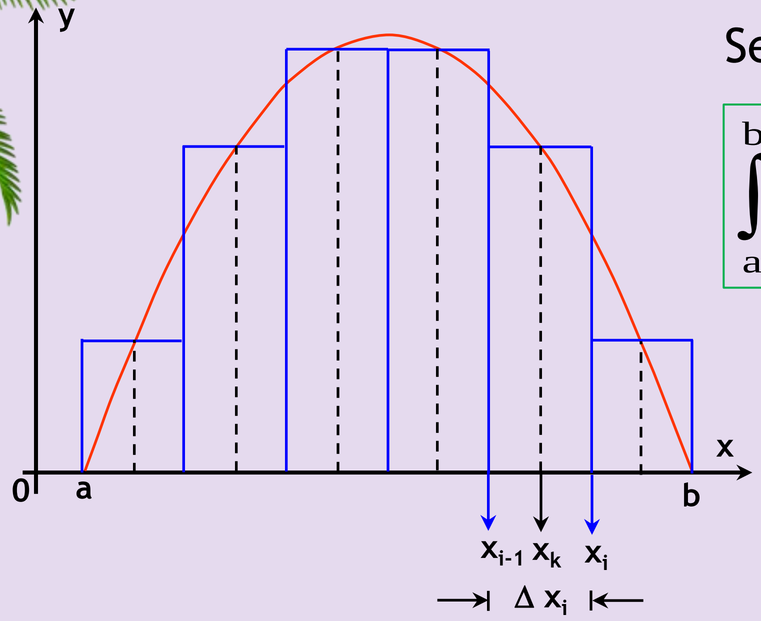


Misalkan selang [a, b] dibagi menjadi n bagian (lebar tidak harus sama) dengan lebar selang ke-i adalah $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Pada selang $[x_{i-1}, x_i]$ diambil titik sampel x_k maka jumlah Riemann dituliskan sebagai :

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k$$

DEFINISI INTEGRAL

Perhatikan gambar di bawah ini!



Selanjutnya didefinisikan bahwa:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k}$$

Bentuk $\int_a^b f(x)\,dx$

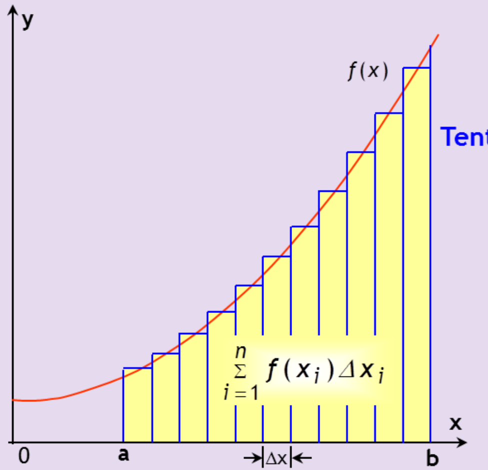
disebut dengan **integral tentu**

(Integral Riemann)

DEFINISI INTEGRAL

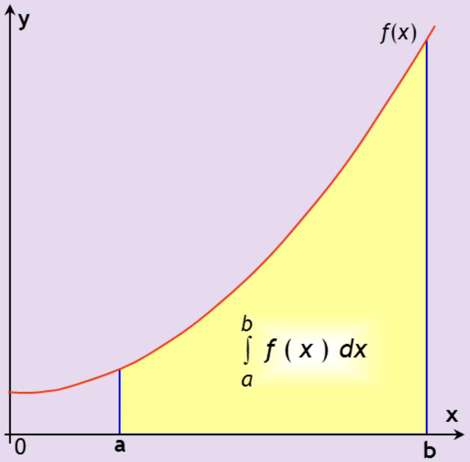
Secara geometri definisi integral Riemaan di atas dapat diartikan sebagai **<u>luas daerah di bawah kurva *y* = *f*(x)</u>** pada interval [a, b].

Jumlah Luas Partisi **Berubah Menjadi** **Integral**



Tentukan limitnya

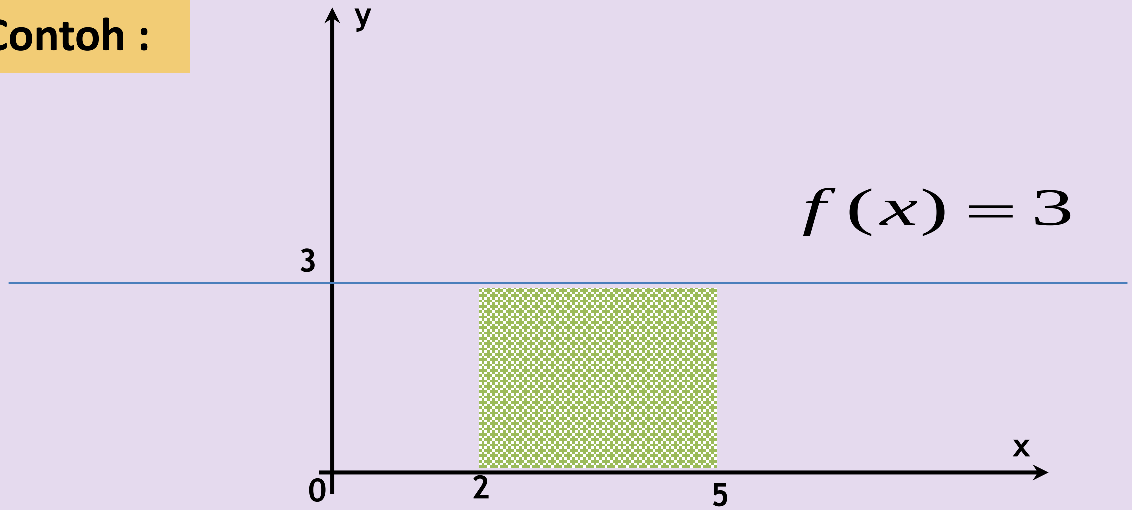
$n \to \infty$



$$L = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$

DEFINISI INTEGRAL

Contoh :



$$\int_2^5 3dx = 3x \Big|_2^5 = (3 \cdot 5) - (3 \cdot 2) = 15 - 6 = 9$$

PENYELESAIAN INTEGRAL FUNGSI

- Rumus Dasar
- Teknik Integral

PENYELESAIAN INTEGRAL FUNGSI

RUMUS DASAR INTEGRAL

$$\int 0\, dx = c$$

$$\int a\, dx = ax + c$$

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{(n+1)} x^{(n+1)} + c \quad \text{dimana } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + c$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)}\, dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + c$$

PENYELESAIAN INTEGRAL FUNGSI

Contoh :

a. $\int 4\,dx = 4x + C$

b. $\int x^7 dx = \frac{1}{7+1} x^{7+1} + C$

$= \frac{1}{8} x^8 + C$

c. $\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{2}{3}+1} + C$

$= \frac{1}{\frac{5}{3}} x^{1\frac{2}{3}} + C$

$= \frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} + C$

PENYELESAIAN INTEGRAL FUNGSI

RUMUS DASAR INTEGRAL

Perkalian dengan Konstanta

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Penjumlahan dan pengurangan fungsi

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

PENYELESAIAN INTEGRAL FUNGSI

Contoh :

a. $\int 20\,x^4 dx$

$= 20 \int x^4 dx$

$= 20[(\frac{1}{4+1})x^{4+1}] + C$

$= 20\,[(\frac{1}{5})x^5] + C$

$= \boxed{4x^5 + C}$

b. $\int (4x^3 + 4)dx$

$= \int 4x^3 dx + \int 4dx$

$= 4\int x^3 dx + 4\int dx$

$= 4[(\frac{1}{3+1})x^{3+1} + C_1] + 4(x + C_2)$

$= x^4 + 4C_1 + 4x + 4C_2$

$= x^4 + 4x + 4C_1 + 4C_2$

$= x^4 + 4x + C$

LATIHAN SOAL

a. $\int -4x^3 dx$

b. $\int \sqrt[5]{x^4} dx$

c. $\int -3x^{\frac{-2}{3}} dx$

d. $\int (2-3x)^2 dx$

e. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x}} dx$

f. $\int \frac{(x-2)^2}{x\sqrt{x}} dx$

PENYELESAIAN INTEGRAL FUNGSI

RUMUS DASAR INTEGRAL (Fungsi Exponensial)

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

PENYELESAIAN INTEGRAL FUNGSI

Contoh :

$$\int 100e^{2x}\, dx = \frac{100}{2} e^{2x} + c$$

PENYELESAIAN INTEGRAL FUNGSI

RUMUS DASAR INTEGRAL (Fungsi Trigonometri)

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

PENYELESAIAN INTEGRAL FUNGSI

RUMUS DASAR INTEGRAL (Fungsi Hyperbolic)

$$\int \sinh x\, dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x\, dx = \sinh x + c$$

TEKNIK INTEGRAL

- Substitusi
- Integral Parsial

TEKNIK INTEGRAL

- **Substitusi**
- **Integral Parsial**

Jika $u = g(x)$ dengan g adalah fungsi yang mempunyai turunan

Maka : $f(u) = f(g(x))$

$$\int f(u)du = \int f(u)du \cdot \frac{dx}{dx}$$

$$= \int f(g(x))\frac{du}{dx}dx$$

PENYELESAIAN INTEGRAL FUNGSI

Contoh 1 :

Hitunglah $\int \sin(3x+5)dx$

Jawab

Misalkan u = 3x + 5 , maka du = 3 dx , dx = 1/3 du

Substitusi ke fungsi di atas diperoleh

$$\int \sin(3x+5)dx = \int \frac{\sin u}{3} du = -\frac{\cos u}{3} + C = -\frac{\cos(3x+5)}{3} + C$$

PENYELESAIAN INTEGRAL FUNGSI

Contoh 2 :

$$\int (2x-5)(x^2-5x+14)^6\,dx$$

Missal $u = (x^2-5x+14)$

$$u \longrightarrow du = (2x-5)dx$$

$$\int (x^2-5x+14)^6(2x-5)dx = \int (x^2-5x+14)^6(2x-5)dx$$

$$= \int u^6\,du$$

$$= \tfrac{1}{7}u^7 + C$$

$$= \tfrac{1}{7}(x^2-5x+14)^7 + C$$

LATIHAN SOAL

a. $\int 9xe^{-3x^2+5}dx$

b. $\int \sqrt{x^3+4}.x^2dx$

c. $\int \frac{(3x^2-4)dx}{\sqrt{(x^3-4x)^3}}$

TEKNIK INTEGRAL

- **Substitusi**
- **Integral Parsial**

Formula Integral Parsial

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Catatan : pilih *u* yang turunannya lebih sederhana

PENYELESAIAN INTEGRAL FUNGSI

Contoh :

Hitung $\int xe^x\,dx$

misal *u* = *x*, maka *du=dx*

$$dv = e^x\,dx \;\Rightarrow v = \int e^x\,dx = e^x$$

sehingga

$$\int xe^x\,dx = x\ e^x - \int e^x\,dx = x\ e^x - e^x + C$$

LATIHAN SOAL

a. $\int x^2 \sin x \, dx$

b. $\int (3-5x)\cos(4x)\,dx$

Thank you!