Telkom University

Diploma of Telecommunication Engineering

DTH1B3 - MATEMATIKA TELEKOMUNIKASI I

Sistem Bilangan Kompleks

By : Dwi Andi Nurmantris

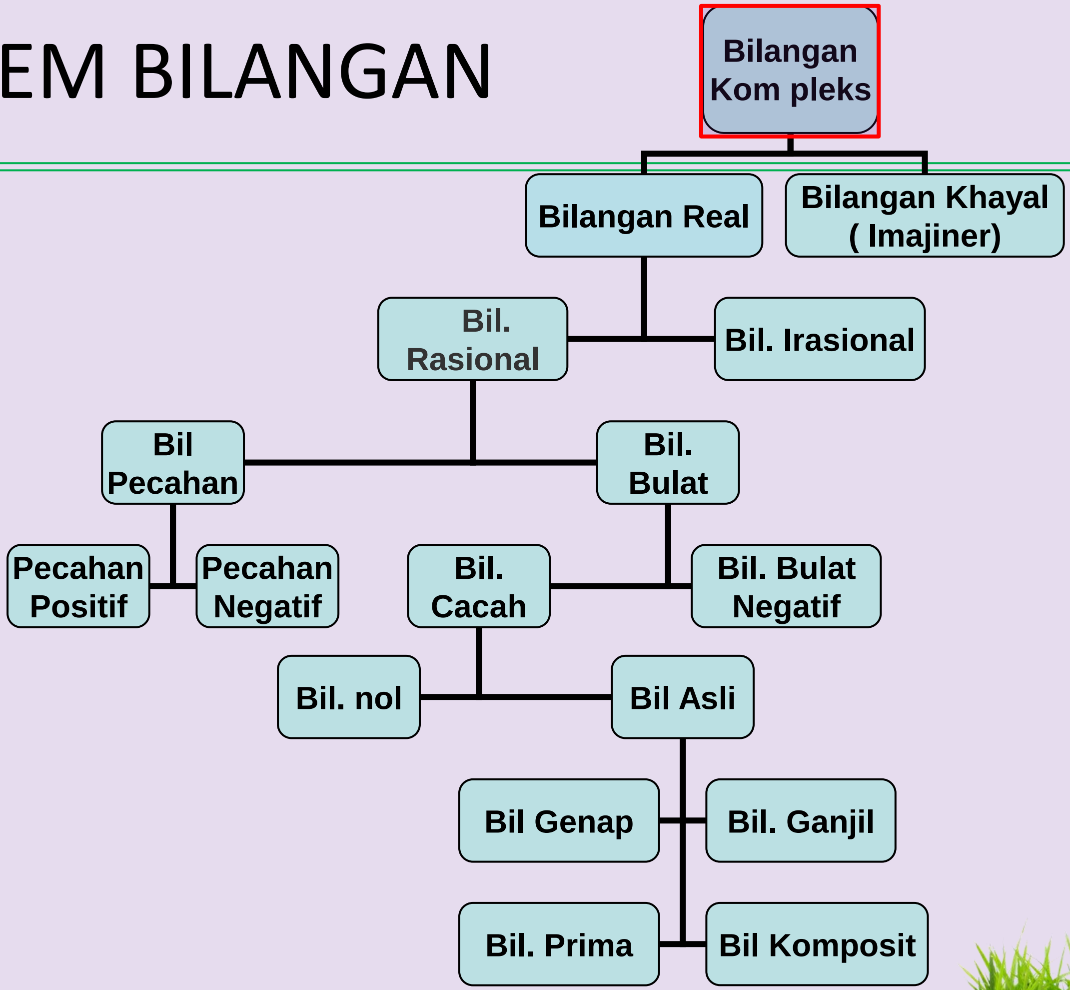
Capaian Pembelajaran

- Mampu memahami sistem bilangan kompleks dan aturan De Moivre.

Materi Pembelajaran

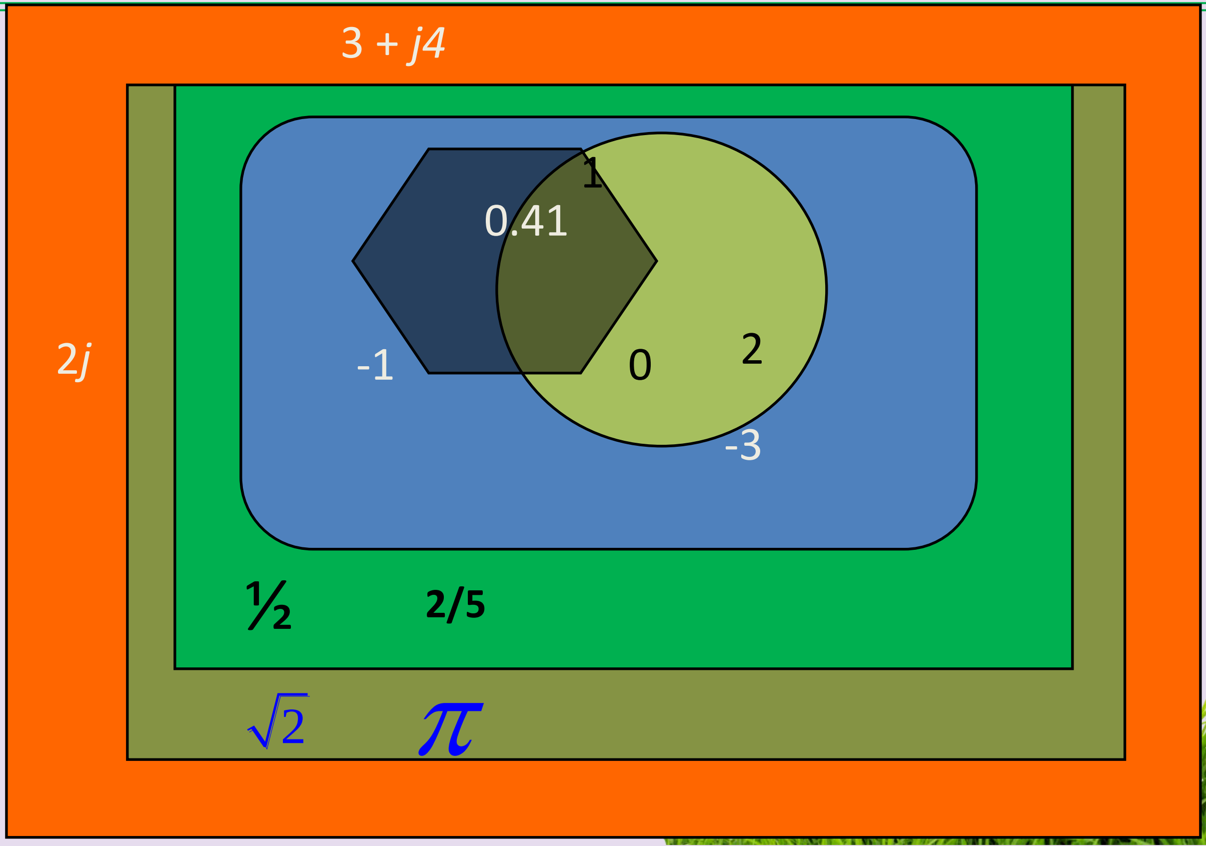
1. Sistem Bilangan Kompleks
2. Aturan de Moivre

SISTEM BILANGAN



SISTEM BILANGAN

BILANGAN ASLI
BILANGAN NOL
BILANGAN BULAT
BILANGAN RASIONAL
BILANGAN IRASIONAL
BILANGAN KOMPLEKS



DEFINISI BILANGAN KOMPLEKS

Secara umum bilangan kompleks dapat dinyatakan sebagai :

$$\boxed{a + jb}$$

Dimana :

$$j = \sqrt{-1}$$

Dimana ***a*** merupakan bagian riil, dan ***jb*** merupakan bagian imajiner. Bentuk ini disebut sebagai **Bilangan Kompleks Kartesian**

DEFINISI BILANGAN KOMPLEKS

Kenapa kita butuh Bilangan Kompleks?

Misalkan:

Grafiknya

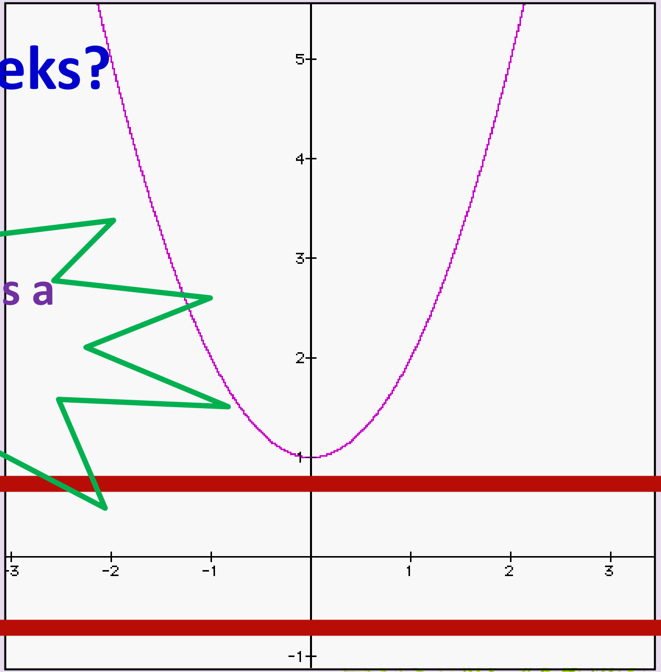
Carilah nilai x :

$x^2 + 1 = 0$

$$x^2 = -1$$

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{-1} \; ?$$

Complex Number is a tool to solve an equation



parabola Tidak berpotongan
Pada sumbu x

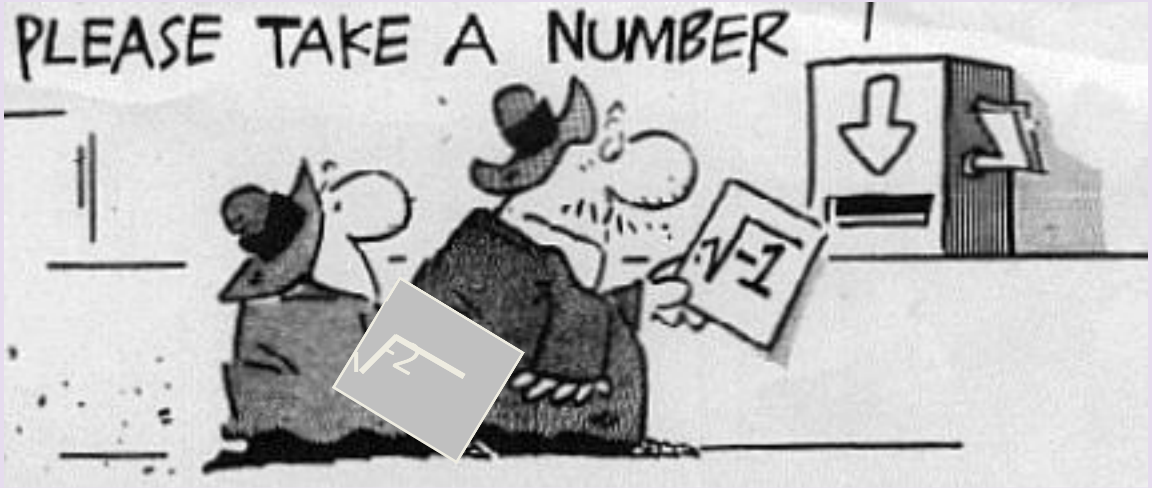
Berapa nilai *bilangan real* yang memenuhi?

DEFINISI BILANGAN KOMPLEKS

Kenapa kita butuh Bilangan Kompleks?

- Untuk mendapatkan Solusi persamaan Polinom
- Untuk mendapatkan Solusi Persamaan Differential
- Elektromagnetik
- Elektronika (Induktansi and Kapasitansi)

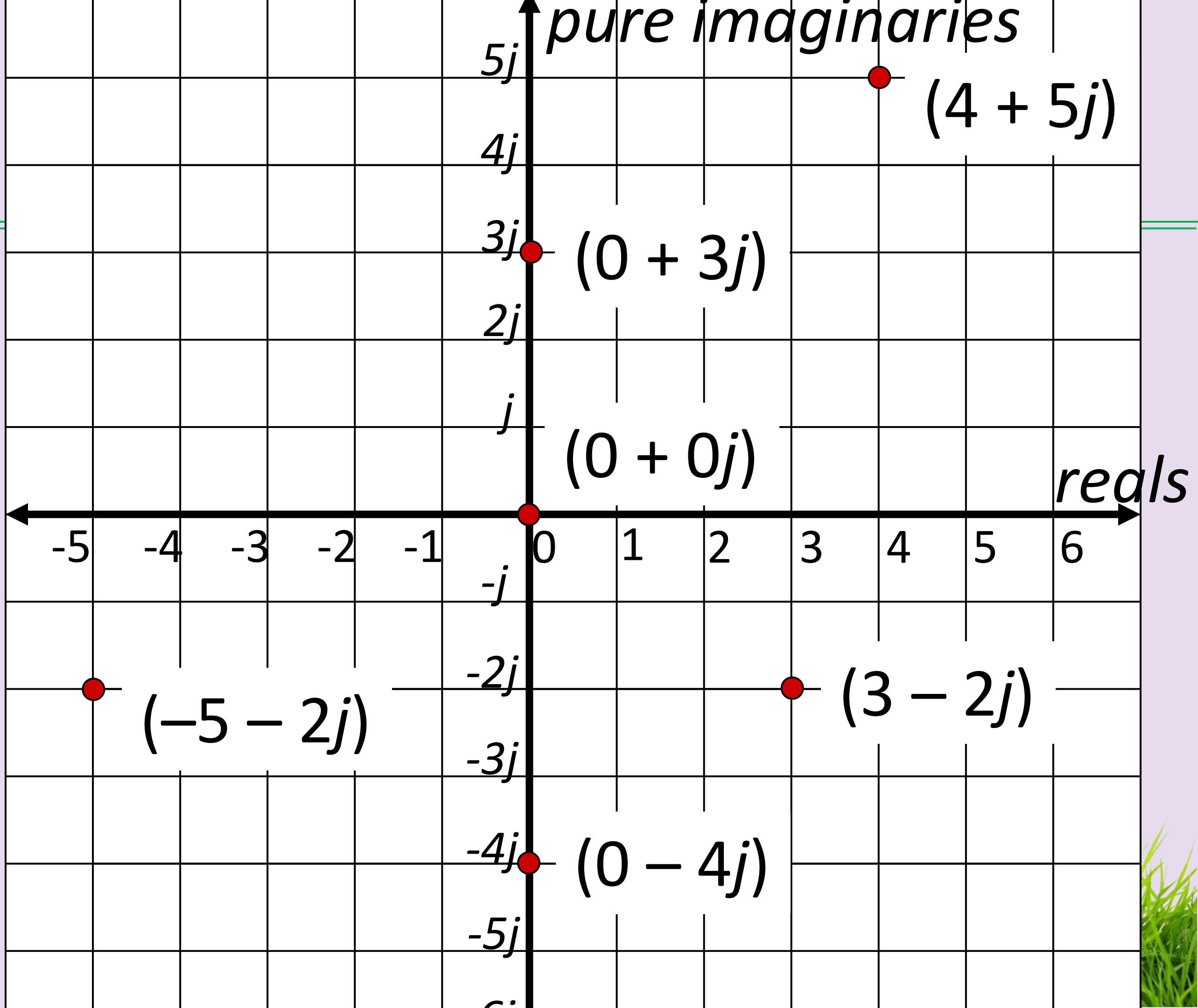
DEFINISI BILANGAN KOMPLEKS



Siapa yang duluan?

Bilangan Kompleks tidak memiliki urutan

BIDANG KOMPLEKS



BENTUK-BENTUK BILANGAN KOMPLEKS

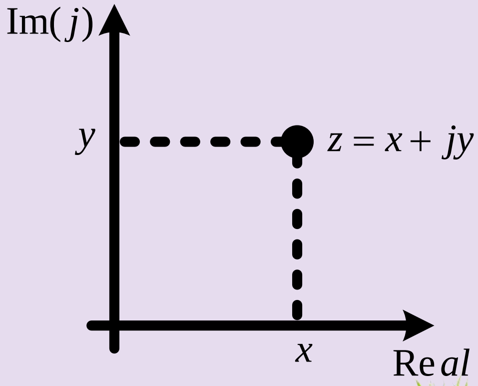
- **Bentuk Rectangular**
- **Bentuk Polar**
- **Bentuk Eksponensial**
- **Bentuk Trigonometri**

BENTUK-BENTUK BILANGAN KOMPLEKS

- **Bentuk Rectangular**
- **Bentuk Polar**
- **Bentuk Eksponensial**
- **Bentuk Trigonometri**

Bentuk Rectangular

$$\boxed{Z = x + jy}$$

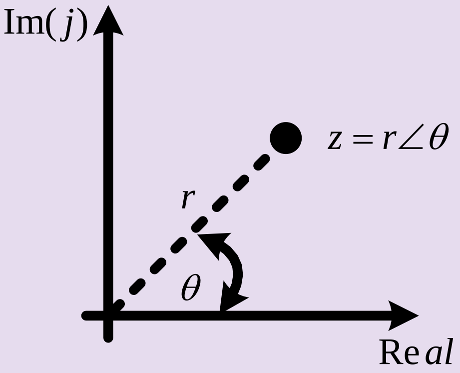


BENTUK-BENTUK BILANGAN KOMPLEKS

- **Bentuk Rectangular**
- **Bentuk Polar**
- **Bentuk Eksponensial**
- **Bentuk Trigonometri**

Bentuk Polar

$$\boxed{Z = r\angle\theta}$$



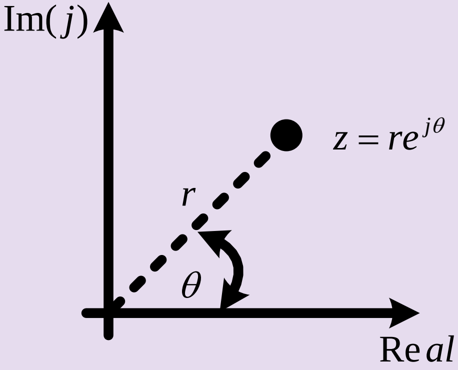
Rectangular <> Polar

$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

BENTUK-BENTUK BILANGAN KOMPLEKS

- **Bentuk Rectangular**
- **Bentuk Polar**
- **Bentuk Eksponensial**
- **Bentuk Trigonometri**



Bentuk Eksponensial

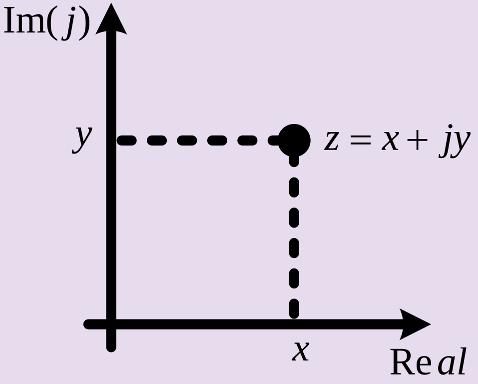
$$\boxed{Z = re^{j\theta}}$$

$$\begin{aligned} Z &= re^{j\theta} \\ &= r(\cos\theta + j\sin\theta) \\ &= r\cos\theta + jr\sin\theta \end{aligned}$$

x y

BENTUK-BENTUK BILANGAN KOMPLEKS

- **Bentuk Rectangular**
- **Bentuk Polar**
- **Bentuk Eksponensial**
- **Bentuk Trigonometri**



Bentuk Trigonometri

$$Z = re^{j\theta}$$

$$Z = re^{j\theta}$$

$$= r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$\boxed{Z = r\cos\theta + jr\sin\theta}$$

x y

Disebut Bentuk trigonometri

LATIHAN SOAL

1. Nyatakan bilangan kompleks berikut kedalam bentuk Polar

   a. $Z = 2 + j3$

   b. $Z = 5 - j4$

2. Nyatakan bilangan kompleks berikut kedalam bentuk Rectangular

   (a) $4\angle 30^\circ$ (b) $7\angle -145^\circ$

OPERASI BILANGAN KOMPLEKS

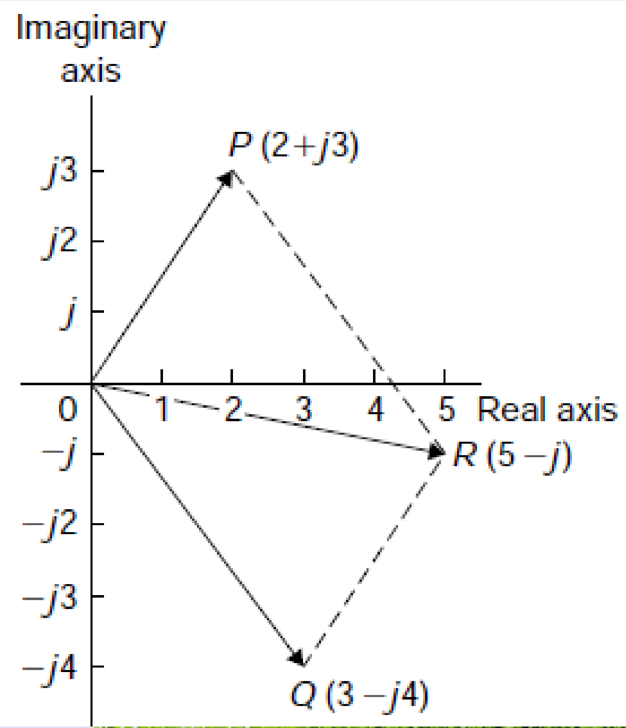
[BENTUK RECTANGULAR] Penjumlahan dan pengurangan

Misalkan $Z_1 = a + jb$ dan

Maka
$$Z_1 + Z_2 = (a + jb) + (c + jd)$$
$$= (a + c) + j(b + d)$$

Dan
$$Z_1 - Z_2 = (a + jb) - (c + jd)$$
$$= (a - c) + j(b - d)$$

Contoh :
$$(2 + j3) + (3 - j4)$$
$$= 2 + j3 + 3 - j4$$
$$= 5 - j1$$



OPERASI BILANGAN KOMPLEKS

[BENTUK RECTANGULAR] Perkalian

Perkalian pada bilangan kompleks dapat dilakukan dengan mengasumsikan semua bagian adalah bilangan riil, dan $j^2 = -1$.

Contoh :

$$(3 + j2)(4 - j5) = 12 - j15 + j8 - j^2 10$$

$$= (12 - (-10)) + j(-15 + 8)$$

$$= 22 - j7$$

OPERASI BILANGAN KOMPLEKS

[BENTUK RECTANGULAR] Konjugasi Kompleks

Konjugasi kompleks dari suatu bilangan kompleks dapat diperoleh dengan menukar tanda pada bagian imajinernya.

Misal, konjugasi kompleks dari $a + jb$ adalah $a - jb$.

Perkalian antara suatu bilangan kompleks dengan konjugasinya selalu menghasilkan bilangan riil.

Contoh :

$$\begin{aligned}(3+j4)(3-j4) &= 9 - j12 + j12 - j^2 16 \\ &= 9 + 16 = 25\end{aligned}$$

OPERASI BILANGAN KOMPLEKS

[BENTUK RECTANGULAR] Pembagian

Menyelesaikan pembagian bilangan kompleks dilakukan dengan cara mengalikan pembilang dan penyebut pecahan tersebut dengan konjugasi kompleks penyebutnya.

Contoh :

$$\frac{2-j5}{3+j4} = \frac{2-j5}{3+j4} \times \frac{(3-j4)}{(3-j4)}$$

$$= \frac{6-j8-j15+j^2 20}{3^2+4^2}$$

$$= \frac{-14-j23}{25} = \frac{-14}{25} - j\frac{23}{25}$$

OPERASI BILANGAN KOMPLEKS

[BENTUK RECTANGULAR] Persamaan Bilangan Kompleks

Pada dua bilangan kompleks bernilai sama, maka bagian real kedua bilangan tersebut adalah sama, dan bagian imajiner kedua bilangan tersebut juga sama.

Jika $a + jb = c + jd$ maka $a = c$ and $b = d$

Contoh:
Selesaikan persamaan kompleks berikut ini

$$2(x + jy) = 6 - j3$$

$2(x + jy) = 6 - j3$ maka $2x + j2y = 6 - j3$

$2x = 6,$ maka $x = 3$

$2y = -3,$ maka $y = -\frac{3}{2}$

LATIHAN SOAL

1. Jika $Z_1 = 1 - j3$ dan $Z_2 = -2 + j5$

   selesaikan $$\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

2. Selesaikan persamaan kompleks berikut ini :

$$(1 + j2)(-2 - j3) = a + jb$$

OPERASI BILANGAN KOMPLEKS

[BENTUK POLAR] Perkalian dan Pembagian

Jika $Z_1 = r_1\angle\theta_1$ dan $Z_2 = r_2\angle\theta_2$ maka:

(i) $Z_1 Z_2 = r_1 r_2 \angle(\theta_1 + \theta_2)$

(ii) $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2)$

Contoh

Tentukan $\dfrac{10\angle\frac{\pi}{4} \times 12\angle\frac{\pi}{2}}{6\angle-\frac{\pi}{3}}$

Solusi: $\dfrac{10\angle\frac{\pi}{4} \times 12\angle\frac{\pi}{2}}{6\angle-\frac{\pi}{3}} = \dfrac{10\times 12}{6}\angle\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 20\angle\dfrac{13\pi}{12}$ atau $20\angle 195°$

$= 20\angle-\dfrac{11\pi}{12}$ atau $20\angle-165°$

TEOREMA DE MOIVRE

Persamaan umum:

$$\boxed{[r\angle\theta]^n = r^n\angle n\theta}$$

Contoh

Tentukan nilai bilangan kompleks berikut dalam bentuk polar.

$$[2\angle 35^\circ]^5$$

Solusi:

$$[2\angle 35^\circ]^5 = 2^5\angle(5\times 35^\circ) = \mathbf{32\angle 175^\circ}$$

Thank you!