


DTH1B3 - MATEMATIKA TELEKOMUNIKASI I

Persamaan Differensial

By : Dwi Andi Nurmantris




Capaian Pembelajaran

- Mampu memahami dan menyelesaikan Persamaan Diferensial
- 



Materi Pembelajaran

1. Definisi Persamaan Diferensial
 2. Bentuk Penulisan persamaan diferensial
 3. Solusi Persamaan Diferensial
- 

Definisi Persamaan Differensial

Persamaan Diferensial adalah suatu persamaan yang memuat derivatif atau diferensial

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = 0$$

Definisi Persamaan Differensial

Contoh:

$$1. \frac{dy}{dx} = x + 2$$

$$2. \frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6 = 0$$

$$3. xy' + y = 6$$

$$4. y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos x$$

$$5. y'' = \sqrt{y' + \sin x}$$

$$6. yy' + 2x = \frac{y}{y'}$$

$$7. \frac{\partial z}{\partial x} = z + x \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$8. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$$

Definisi Persamaan Differensial

Persamaan Diferensial Biasa

Adalah persamaan differensial yang didalamnya terdapat satu variabel bebas dan satu variabel tak bebas

Contoh :

$$1. \quad \frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

$$2. \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + ay = 0$$

$$3. \quad \frac{d^3 y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + 6y = 3$$

y adalah variabel tak bebas
and **x** adalah variabel bebas,

Definisi Persamaan Differensial

Persamaan Diferensial Parsial

Adalah persamaan differensial yang didalamnya terdapat lebih dari satu variabel bebas dan satu variabel tak bebas

Contoh :

$$1. \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 0$$

$$2. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

u adalah variabel tak bebas
dan x **and** t adalah variabel
bebas

Definisi Persamaan Differensial

Tingkat (Order)

Tingkat (order) dari PD ditentukan oleh tingkat derivatif tertinggi dalam PD tersebut

Contoh :

Differential Equation

ORDER

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

1

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

2

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + 6y = 3$$

3



Definisi Persamaan Differensial

Pangkat (derajat)

Pangkat (derajat, degree) dari PD adalah pangkat dari derivatif tingkat tertinggi setelah PD tersebut ditulis dalam bentuk polynomial dalam derivatif

Contoh : **Differential Equation** **Degree**

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + ay = 0$$

1

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 6y = 3$$

1

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3 = 0$$

3



Definisi Persamaan Differensial

Persamaan Diferensial Linear

A differential equation is **linear**, if :

1. dependent variable and its derivatives are of **degree one**,
2. coefficients of a term **does not depend** upon dependent variable.

Contoh :

Differential Equation

Linear/Non-Linear

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 9y = 0.$$

linear.

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + 6y = 3$$

non - linear (because in **2nd term** is not of degree one)

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y \frac{dy}{dx} = x^3$$

non - linear because in **2nd term** coefficient depends on **y**.

Latihan Soal

No	Differential Equations	Ordinary or Partial	Linear or nonlinear	Order	Degree	Independent variables	Dependent variables
1.	$y' = x + 6y$						
2.	$y'' = 4y + y^3$						
3.	$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} - 2y = x^3$						
4.	$y'' + 2xy' + 4y = \cos 2x$						
5.	$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-1}{y+4}$						
6.	$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$						
7.	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$						

Bentuk Penulisan Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial Biasa Orde 1

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Bentuk Umum

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

Bentuk Turunan/ Derivative

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Bentuk Diferensial

Bentuk Penulisan Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial Biasa Orde 2

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

Bentuk Umum

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$


$$a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

Bentuk Turunan/ Derivative



Solusi Persamaan Diferensial Orde 1

1. PD variabel Terpisah
 2. PD yang Homogen
 3. PD Eksak
 4. PD Linear
 5. PD Bernoulli
- 

Solusi Persamaan Diferensial Orde 1

1. PD variabel Terpisah
2. PD yang Homogen
3. PD Eksak
4. PD Linear
5. PD Bernoulli

Solusinya :

Dengan Cara Diintegrasikan
dikedua ruas

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = \int 0 \quad \longrightarrow \quad \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = c$$

PD dikatakan **PD variabel terpisah** jika

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

bisa dibentuk dalam :

$$f_1(x)g_2(y)dx + f_2(x)g_1(y)dy = 0$$



$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = 0$$

Solusi Persamaan Diferensial Orde 1

1. PD variabel Terpisah
2. PD yang Homogen
3. PD Eksak
4. PD Linear
5. PD Bernoulli

Contoh :

Selesaikan persamaan : $x \frac{dy}{dx} = 2 - 4x^3$

Solusinya :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 4x^3}{x} = \frac{2}{x} - 4x^2$$

$$dy = \left(\frac{2}{x} - 4x^2 \right) dx$$

$$\int dy = \int \left(\frac{2}{x} - 4x^2 \right) dx$$

$$y = 2 \ln x - \frac{4}{3} x^3 + c$$

Solusi Persamaan Diferensial Orde 1

1. PD variabel Terpisah
2. PD yang Homogen
3. PD Eksak
4. PD Linear
5. PD Bernoulli

Solusinya :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x+3}{5} = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$$

$$dy = \left(-\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}\right)dx$$

$$\int dy = \int \left(-\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}\right)dx$$

Contoh :

Selesaikan persamaan $5 \frac{dy}{dx} + 2x = 3$

dengan batasan $y = 7/5$ ketika $x = 2$

$$y = -\frac{2}{5 \cdot 2}x^2 + \frac{3}{5}x + c = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x + c$$

Dengan memasukkan nilai batas:

$$\frac{7}{5} = -\frac{1}{5}(2)^2 + \frac{3}{5}(2) + c \quad \text{Diperoleh } \mathbf{C=1}$$

Sehingga : $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x + 1$

Solusi Persamaan Diferensial Orde 1

1. PD variabel Terpisah
2. PD yang Homogen
3. PD Eksak
4. PD Linear
5. PD Bernoulli

Contoh :

Selesaikan persamaan : $4xy \frac{dy}{dx} = y^2 - 1$

Solusinya :

$$\left(\frac{4xy}{y^2 - 1} \right) \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\left(\frac{4y}{y^2 - 1} \right) dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\left(\frac{4y}{y^2 - 1} \right) dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \left(\frac{4y}{y^2 - 1} \right) dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$2 \ln(y^2 - 1) + c_1 = \ln x + c_2$$

$$2 \ln(y^2 - 1) - \ln x = c_2 - c_1$$

$$\ln \left\{ \frac{(y^2 - 1)^2}{x} \right\} = c$$

$$\frac{(y^2 - 1)^2}{\ln x} = e^c$$

Solusi Persamaan Diferensial Orde 1

1. PD variabel Terpisah
2. PD yang Homogen
3. PD Eksak
4. PD Linear
5. PD Bernoulli

PD dikatakan **PD Homogen** jika

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

dengan $M(x, y)$ dan $N(x, y) \Rightarrow$

Merupakan fungsi homogen yang berderajat sama.

Contoh :

$$(x^2 + y^2) dx - 2xy dy = 0$$

$$M(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow \text{homogen derajat 2}$$

$$N(x, y) = -2xy \rightarrow \text{homogen derajat 2}$$

fungsi homogen

$$f(kx, ky) = k^n f(x, y)$$

n disebut derajat kehomogenan

Solusi Persamaan Diferensial Orde 1

1. PD variabel Terpisah
2. PD yang Homogen
3. PD Eksak
4. PD Linear
5. PD Bernoulli

Contoh 2 :

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\begin{aligned} f(kx, ky) &= (kx)^2 + 2kxky + (ky)^2 \\ &= k^2x^2 + 2k^2xy + k^2y^2 \\ &= k^2(x^2 + 2xy + y^2) \rightarrow \text{homogen derajat 2} \end{aligned}$$

Contoh 1 :

$$f(x, y) = x + 3y$$

$$f(kx, ky) = kx + 3ky$$

$$= k^1(x + 3y) \rightarrow \text{homogen derajat 1}$$

Contoh 3 :

$$f(x, y) = 5x - 7y + 13$$

$$f(kx, ky) = 5kx - 7ky + 13$$

$$\neq k^n(5x - 7y + 13) \rightarrow \text{bukan fungsi homogen}$$

Solusi Persamaan Diferensial Orde 1

1. PD variabel Terpisah
2. PD yang Homogen
3. PD Eksak
4. PD Linear
5. PD Bernoulli

Solusinya :

Langkan-langkah untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde 1 homogen adalah sebagai berikut:

1. Susun kembali bentuk $P \frac{dy}{dx} = Q$ menjadi $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$
2. Gunakan substitusi $y=vx$ dimana v merupakan fungsi x , sehingga diperoleh: $\frac{dy}{dx} = v(1) + x \frac{dv}{dx}$
3. Substitusikan y dan dy/dx ke persamaan asal.
4. Atur sehingga di setiap sisi hanya terdapat 1 variabel, lalu integrasikan kedua sisi.
5. Kembalikan ke bentuk asal dengan menggunakan $v = \frac{y}{x}$

Solusi Persamaan Diferensial Orde 1

1. PD variabel Terpisah
2. PD yang Homogen
3. PD Eksak
4. PD Linear
5. PD Bernoulli

Contoh :

Selesaikan persamaan:

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{y}$$

Solusinya :

1. $x \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$

2. Gunakan $y=vx$ dan $\frac{dy}{dx} = v(1) + x \frac{dv}{dx}$

3. Substitusikan y dan dy/dx ke persamaan asal:

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + v^2 x^2}{x(vx)} = \frac{x^2 + v^2 x^2}{vx^2} = \frac{1 + v^2}{v}$$

4. Atur sehingga di setiap sisi hanya terdapat 1 variabel:

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{v} - v = \frac{1 + v^2 - v^2}{v} = \frac{1}{v} \quad \Rightarrow \quad v dv = \frac{1}{x} dx$$

Integrasikan kedua sisi:

$$\int v dv = \int \frac{1}{x} dx \text{ i.e. } \frac{v^2}{2} = \ln x + c$$

5. Kembalikan ke bentuk asal dengan menggunakan $v = \frac{y}{x}$

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln x + c$$

LATIHAN SOAL

Selesaikan persamaan :

1.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x(y-3)}$$

2.
$$4xdy - ydx = x^2 dy$$

3.
$$(x^2 + y^2) dx - 2xy dy = 0$$



Thank you!

