Telkom University

Diploma of Telecommunication Engineering

DTH1G3 - MATEMATIKA TELEKOMUNIKASI II

Integral Lanjut

By : Dwi Andi Nurmantris

Capaian Pembelajaran

- [C3, A3] Mampu menentukan integral fungsi dua Variabel/Lipat 2 dan menentukan integral fungsi 3 variabel/ lipat tiga.

Materi Pembelajaran

- Integral 2 Variabel/Lipat 2
- Integral 3 variabel/Lipat 3

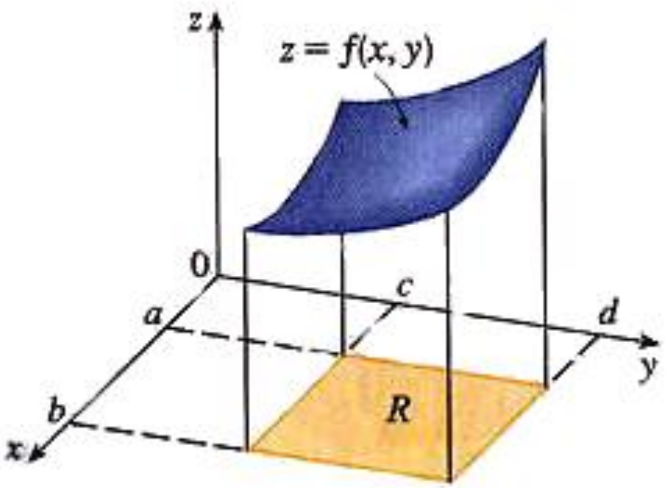
INTEGRAL 2 VARIABEL/LIPAT 2

- Integral 2 variabel/ Integral lipat 2 adalah integral suatu fungsi yang melibatkan 2 buah variabel.
- Integral lipat 2 banyak digunakan dalam aplikasi teknik/Engineering

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dxdy$$

INTEGRAL 2 VARIABEL/LIPAT 2

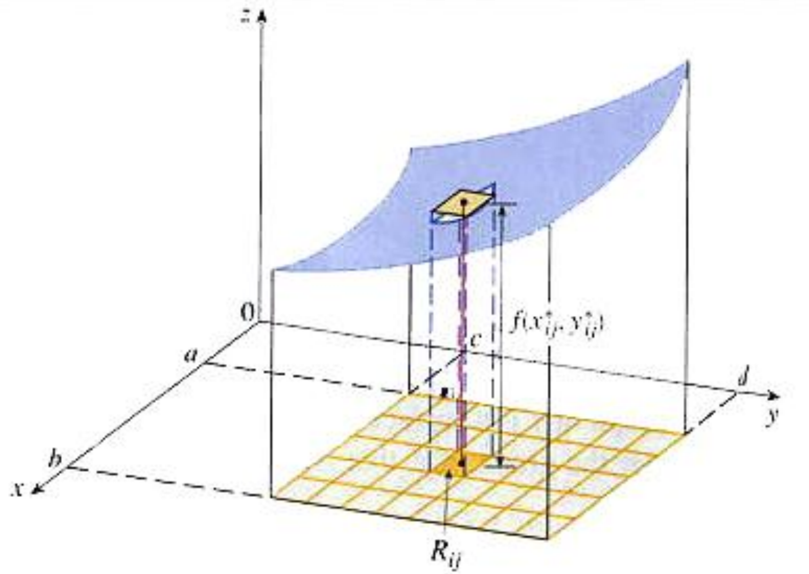
Definisi



Integral 2 variabel pada contoh disamping bisa dipandang dengan cara : mencari volume dari suatu ruang yang terletak diatas permukaan R dan dibawah permukaan Z= f(x,y)

INTEGRAL 2 VARIABEL/LIPAT 2

Definisi

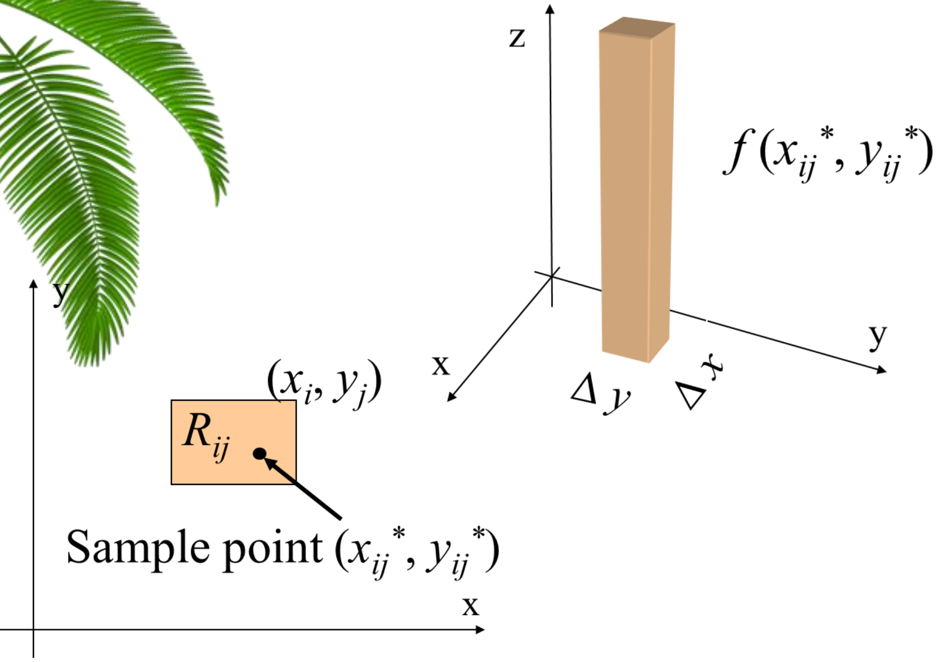


- Langkah pertama adalah membagi segiempat R menjadi beberapa segiempat bagian. Bagi interval $[a,b]$ menjadi m interval $[x_{i-1}, x_i]$ dengan lebar Δx, dan bagi $[c,d]$ menjadi n interval $[y_{j-1}, y_j]$ dengan lebar Δy

$$R_{ij} = \Delta A = \Delta x \Delta y$$

INTEGRAL 2 VARIABEL/LIPAT 2

Definisi

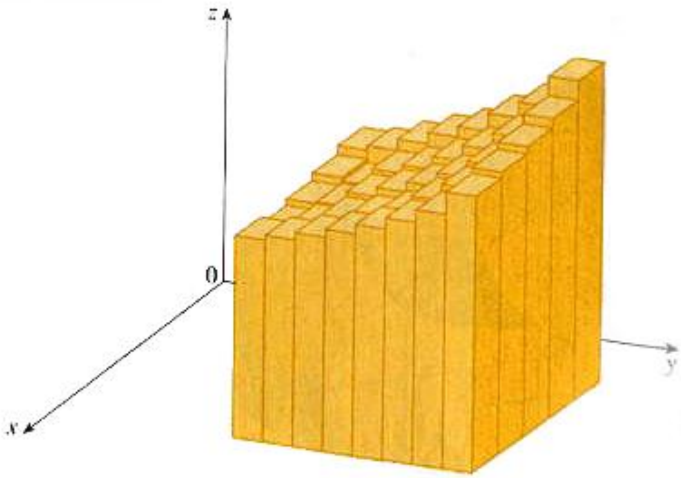


- Jika dipilih titik sampel (x_{ij}^*, y_{ij}^*) dalam setiap R_{ij}, maka bagian dari *Volume* yang terletak di atas R_{ij} dihampiri oleh kotak segi empat dengan alas R_{ij} dan tinggi $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$. Volume kotak ini adalah

$$volume = f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

INTEGRAL 2 VARIABEL/LIPAT 2

Definisi

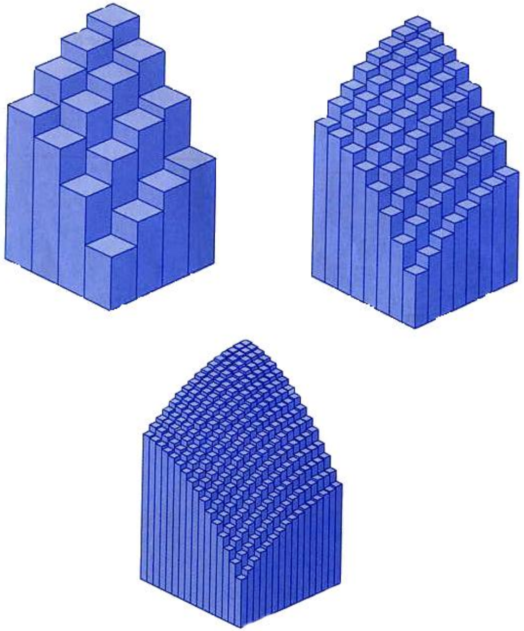


- Jika prosedur ini dilakukan atas semua segiempat dan menambahkan volume kotak yang berkaitan, diperoleh hampiran terhadap volume total

$$\text{total volume} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*})\, \Delta A$$

INTEGRAL 2 VARIABEL/LIPAT 2

Definisi



$$\text{total volume} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*})\,\Delta A$$

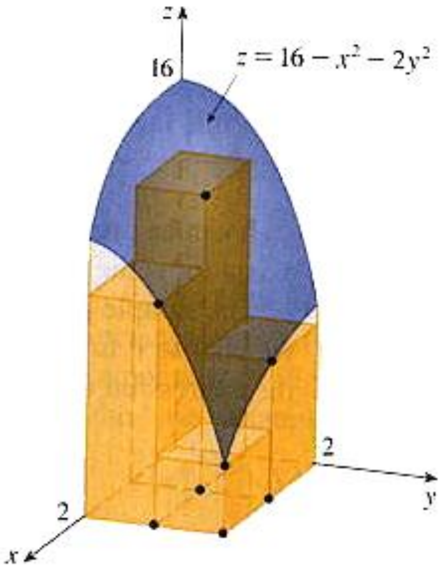
Hampiran diatas akan menjadi lebih presisi jika m dan n *besar*

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*})\Delta A$$

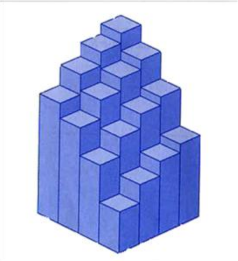
$$\boxed{\lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*})\Delta A = \iint_{R} f(x, y)\,dA}$$

INTEGRAL 2 VARIABEL/LIPAT 2

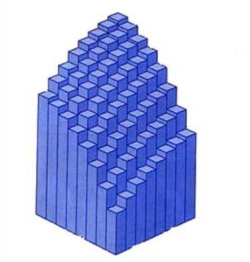
Contoh



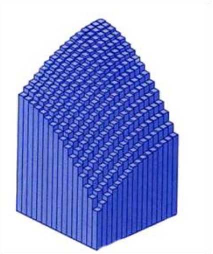
Carilah Volume ruang diatas persegi dan dibawah kurva!



m=n=4
V≈41.5



m=n=8
V≈44.875



m=n=16
V≈46.46875

$$\text{Exact value} = \int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{2}(16 - x^2 - 2y^2)\,dxdy = 48$$

INTEGRAL 2 VARIABEL/LIPAT 2

Teknik Mengintegralkan

1) Integrasikan $f(x,y)$ terhadap x pada limit batas $x = x_1$ dan $x = x_2$, dimana y dianggap sebagai konstanta.
2) Integrasikan hasil pada (1) terhadap y pada batas limit $y = y_1$ dan $y = y_2$.

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y_1}^{y_2}\left(\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx\right)dy$$

INTEGRAL 2 VARIABEL/LIPAT 2

Contoh

$$\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{2}(16-x^2-2y^2)\,dx\,dy$$

$$\int_{x=0}^{2}16-x^2-2y^2\,dx=\left[16x-\frac{x^3}{3}-2y^2x\right]_{x=0}^{2}$$

$$=\frac{88}{3}-4y^2$$

$$\int_{y=0}^{2}\frac{88}{3}-4y^2\,dy=\left[\frac{88y}{3}-\frac{4y^3}{3}\right]_{y=0}^{2}$$

$$=48$$

Latihan Soal

1. $$\int_{y=1}^{3}\int_{x=2}^{5}(2x-3y)\,dx\,dy$$

2. $$\int_{y=1}^{3}\int_{x=0}^{2}(2x^{2}y)\,dx\,dy$$

3. $$\int_{r=1}^{4}\int_{\theta=0}^{\pi}(2+\sin 2\theta)\,d\theta\,dr$$

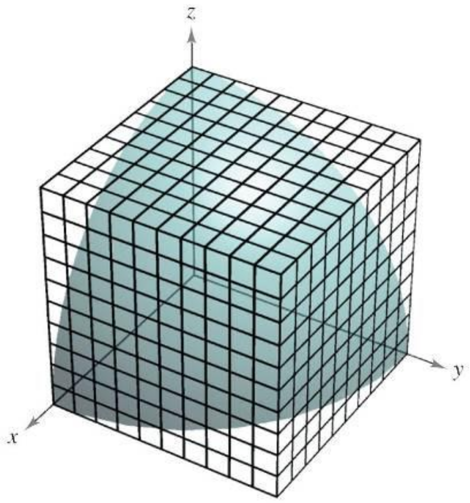
INTEGRAL 3 VARIABEL/LIPAT 3

- Integral 3 variabel/ Integral lipat 3 adalah integral suatu fungsi yang melibatkan 3 buah variabel.
- Integral lipat 3 banyak digunakan dalam aplikasi teknik/Engineering

$$\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

INTEGRAL 3 VARIABEL/LIPAT 3

Definisi

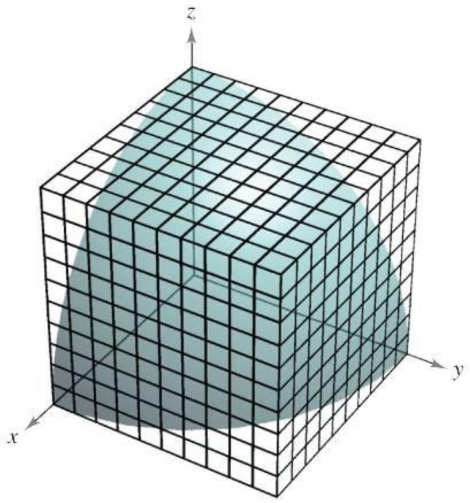


Solid region Q

Integral 3 variabel pada contoh disamping bisa dipandang dengan cara : mencari volume dari suatu ruang yang dibatasi oleh fungsi Z= f(x,y,z) dimana fungsi tersebut berada di dalam ruang solid/padat Q

INTEGRAL 3 VARIABEL/LIPAT 3

Definisi



Solid region Q

- Partisi balok Q menjadi n bagian; Q1, Q2, …, Qk, …, Qn

$$\text{volume balok } Q_k = \Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$$

- Definisikan ||Δ|| = diagonal ruang terpanjang dari Qk
- Maka, volume ruang yang dibatasi oleh fungsi Z= f(x,y,z) dimana fungsi tersebut berada di dalam ruang solid/padat Q =

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta v_k = \int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,z)\,dV$$

INTEGRAL 2 VARIABEL/LIPAT 2

Contoh

Carilah Volume ruang yang dibatasi oleh suatu fungsi 3 variabel **$f(x,y,z)=x^2yz$** yang mana ruang tadi berada dalam suatu balok Q = {(x,y,z)| 1 ≤ x ≤ 2, 0 ≤ y ≤ 1, 1 ≤ z ≤ 2}

Jawab.

$$\iiint_B x^2yz\ dV = \int_1^2\int_0^1\int_1^2 x^2yz\ dx\,dy\,dz$$

$$= \int_1^2\int_0^1 yz\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_1^2 dy\,dz$$

$$= \int_1^2 \frac{7}{3}z\left(\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_0^1 dz$$

$$= \frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}z^2\right)\Bigg|_1^2 = \frac{7}{4}$$

INTEGRAL 3 VARIABEL/LIPAT 3

Teknik Mengintegralkan

1) Integrasikan *f(x,y,z)* terhadap *x* pada limit batas $x = x_1$ dan $x = x_2$, dimana *y* dan *z* dianggap sebagai konstanta.
2) Integrasikan hasil pada (1) terhadap *y* pada batas limit $y = y_1$ dan $y = y_2$, dimana *z* dianggap sebagai konstanta.
3) Integrasikan hasil pada (2) terhadap *z* pada batas limit $z = z_1$ dan $z = z_2$.

$$\int_{z_1}^{z_2}\left(\int_{y_1}^{y_2}\left(\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,z)\,dx\right)dy\right)dz$$

INTEGRAL 3 VARIABEL/LIPAT 3

Contoh

$$\int_{z=1}^{2}\int_{y=-1}^{3}\int_{x=0}^{2}(x-3y+z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\int_{x=0}^{2}(x-3y+z)dx=\left[\frac{x^2}{2}-3yx+zx\right]_{x=0}^{2}$$

$$=2-6y+2z$$

$$\int_{y=-1}^{3}(2-6y+2z)dy=\left[2y-\frac{6y^2}{2}+2zy\right]_{y=-1}^{3}$$

$$=-16+8z$$

$$\int_{z=1}^{2}(-16+8z)dz=\left[-16z+\frac{8z^2}{2}\right]_{z=1}^{2}$$

$$=-4$$

Latihan Soal

1. $$\int_{c=1}^{3}\int_{b=0}^{2}\int_{a=0}^{1}(2a^2-b^2+3c^2)\,dadbdc$$

2. $$\int_{z=1}^{2}\int_{y=2}^{3}\int_{x=0}^{1}(8xyz)\,dxdydz$$

3. $$\int_{z=0}^{\pi}\int_{y=0}^{\pi}\int_{x=0}^{\pi}(xy\sin z)\,dxdydz$$

Thank you!