Telkom University

Diploma of Telecommunication Engineering

DTH1G3 - MATEMATIKA TELEKOMUNIKASI II

Deret Fourier dan Transformasi Fourier

By : Dwi Andi Nurmantris

Capaian Pembelajaran

- [C4, A2] Mampu membedakan fungsi periodik dan non periodik
- [C4, A2] Mampu membedakan fungsi Ganjil dan Fungsi Genap
- [C4, A2] Mampu menjabarkan berbagai tipe fungsi ke dalam bentuk deret Fourier
- [C4, A2] Mampu menggunakan Transformasi Fourier untuk mengubah signal dari kawasan waktu ke kawasan frekuensi

Materi Pembelajaran

1. Pendahuluan
2. Deret Fourier
3. Transformasi Fourier

Pendahuluan

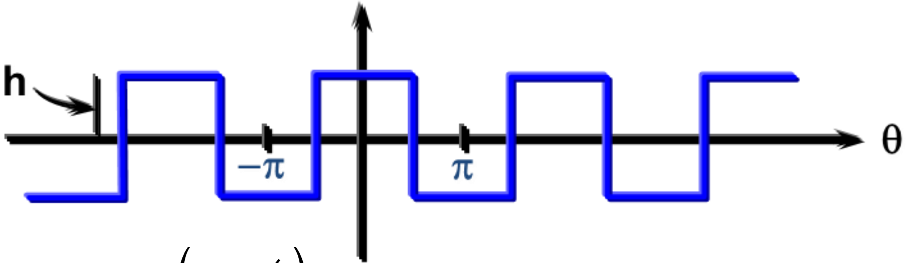
TEOREMA FOURIER

Pada tahun 1822, Joseph Fourier, ahli matematika dari Prancis menemukan bahwa :

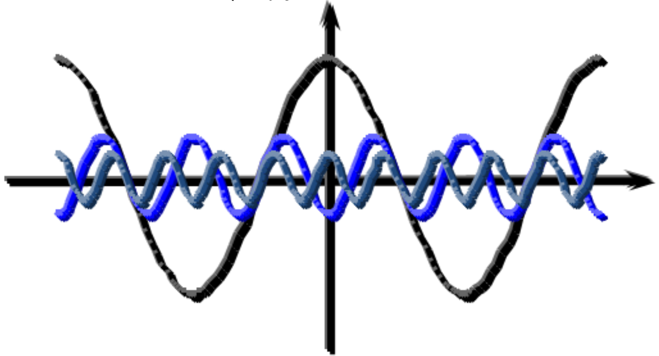
Setiap fungsi periodik (sinyal) dapat dibentuk dari penjumlahan gelombang-gelombang sinus/cosinus.

TEOREMA FOURIER

Contoh 1 : **Sinyal kotak** merupakan penjumlahan dari fungsi-fungsi Cosinus berikut (lihat gambar berikut)



$$f(\theta) = \left(4h/\pi\right)\left(\cos\theta - \tfrac{1}{3}\cos 3\theta \ldots + \tfrac{1}{5}\cos 5\theta - \tfrac{1}{7}\cos 7\theta \ldots\right)$$



TEOREMA FOURIER

Contoh 1 : **Sinyal kotak** merupakan penjumlahan dari fungsi-fungsi Cosinus berikut (lihat gambar berikut)

Penjumlahan 2 komponen sinus pertama

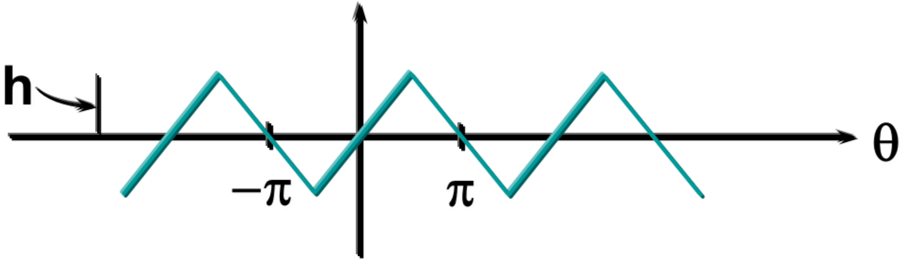
Penjumlahan 5 komponen sinus pertama

Penjumlahan 3 komponen sinus pertama

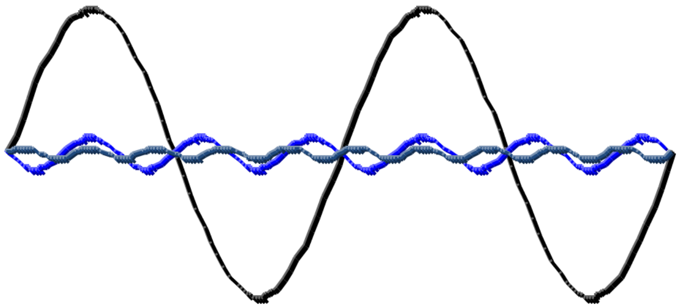
Penjumlahan 10 komponen sinus pertama

TEOREMA FOURIER

Contoh 2 : **Sinyal Segitiga** merupakan penjumlahan dari fungsi-fungsi Cosinus berikut (lihat gambar berikut)

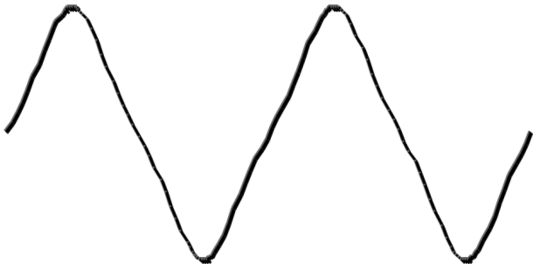


$$f(\theta) = \left(8h/\pi^2\right)\left(\frac{\sin\theta}{1^2} - \frac{\sin 3\theta}{3^2} \ldots + \frac{\sin 5\theta}{5^2} - \frac{\sin 7\theta}{7^2} \ldots\right)$$

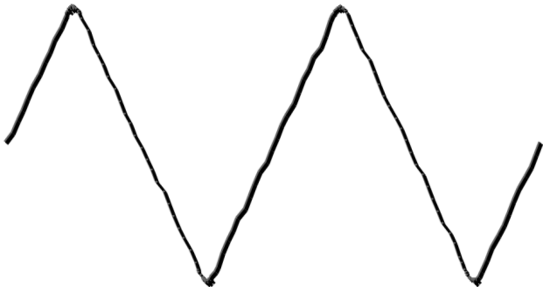


TEOREMA FOURIER

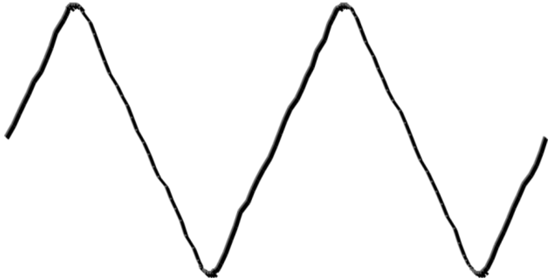
Contoh 2 : **Sinyal Segitiga** merupakan penjumlahan dari fungsi-fungsi Cosinus berikut (lihat gambar berikut)



Penjumlahan 2 komponen sinus pertama



Penjumlahan 5 komponen sinus pertama



Penjumlahan 3 komponen sinus pertama

Penjumlahan 10 komponen sinus pertama

TEOREMA FOURIER

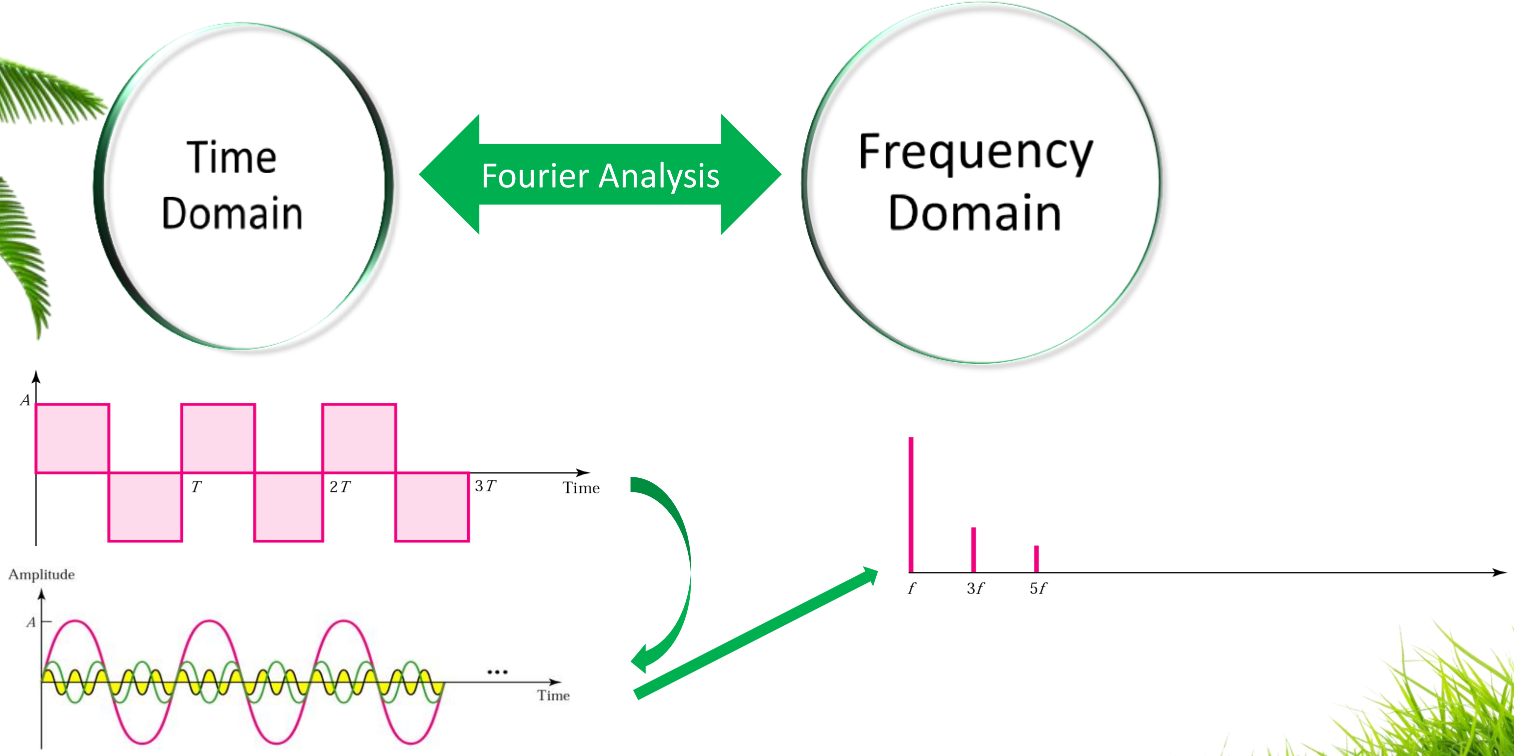
Jika semua sinyal periodik dapat dinyatakan dalam penjumlahan fungsi-fungsi sinus-cosinus, pertanyaan berikutnya yang muncul adalah:

Jika saya memiliki sebuah sinyal sembarang, bagaimana saya tahu fungsi-fungsi cos – sin apa yang membentuknya ?

Caranya dengan menggunakan Fourier analysis

(DERET FOURIER / TRANSFORMASI FOURIER)

FOURIER ANALYSIS

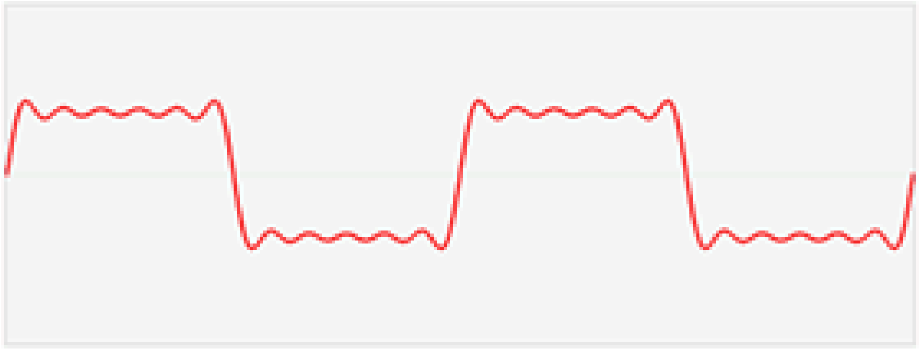


FOURIER ANALYSIS

Time Domain

Fourier Analysis

Frequency Domain



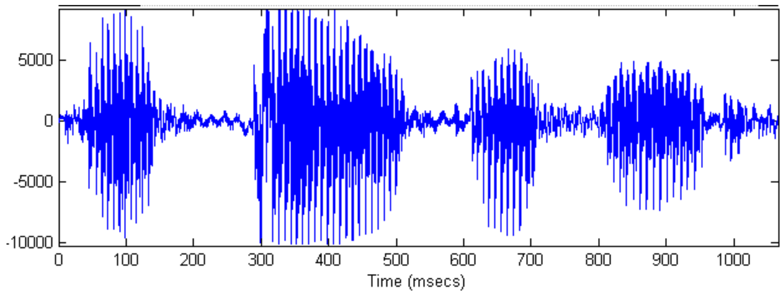
FOURIER ANALYSIS

	Continuous Time Function	Discrete Time Function
Periodic Time function	**Fourier Series** (Descrete Frequency Function)	**Discrete Fourier Transform** (Descrete Frequency Function)
Aperiodic Time function	**Continuous Fourier Transform** (Continues Frequency Function)	**Fourier Transform** (Descrete Frequency Function)

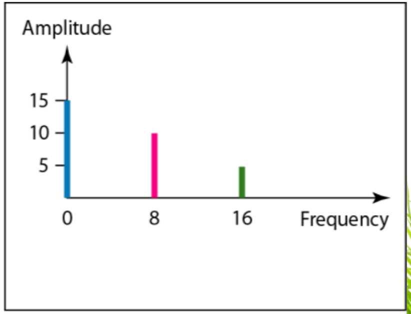
Klasifikasi Sinyal

Time Vs Frequency Domain Function

Fungsi matematis yang merepresentasikan suatu sinyal yang dinyatakan dengan variabel bebas berupa waktu disebut **Time Domain Function**



Fungsi matematis yang merepresentasikan suatu sinyal yang dinyatakan dengan variabel bebas berupa Frekuensi disebut **Frequency Domain Function**



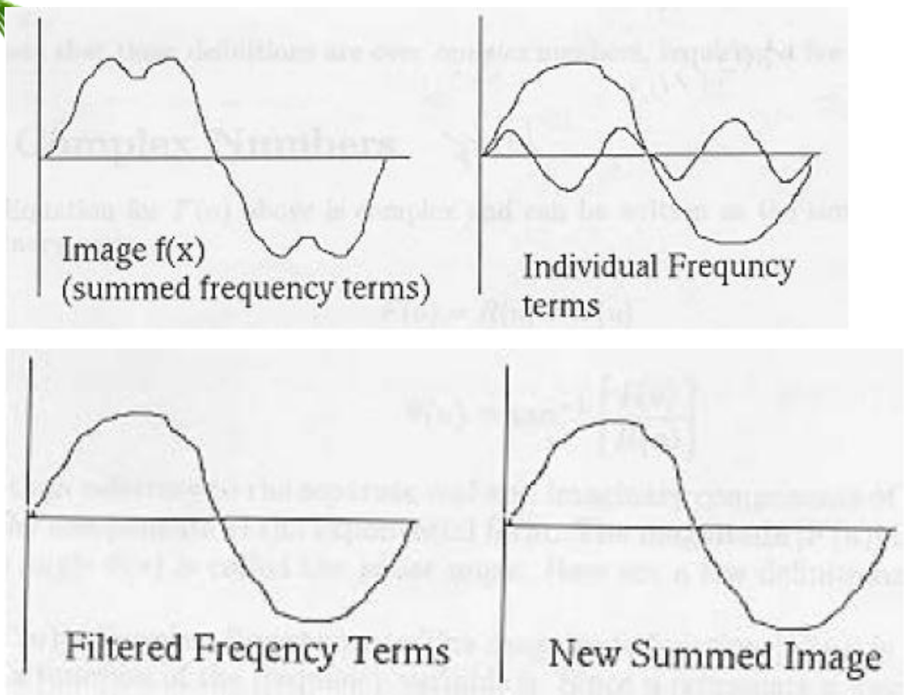
Klasifikasi Sinyal

Why Frequency Domain?

- Easier to remove undesirable frequencies in the **frequency** domain.
- Faster to perform certain operations in the **frequency** domain than in the **spatial** domain.

Klasifikasi Sinyal

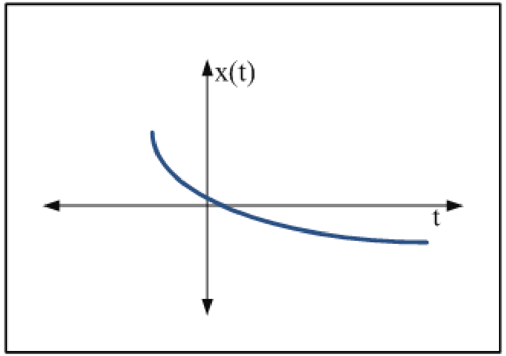
Why Frequency Domain?



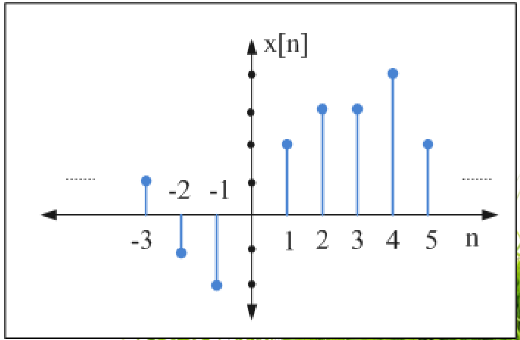
Klasifikasi Sinyal

Continuous Time Vs Descrete Time Function

Fungsi matematis yang merepresentasikan suatu sinyal yang dinyatakan dengan variabel waktu dan terdefinisi untuk setiap nilai pada sumbu waktu disebut **Continuous Time Function**



Fungsi matematis yang merepresentasikan suatu sinyal yang dinyatakan dengan variabel waktu dan hanya terdefinisi pada nilai-nilai tertentu (descrete) pada sumbu waktu disebut **Descrete Time Function**



Klasifikasi Sinyal

Periodic Vs Aperiodic Time Function

Fungsi matematis yang merepresentasikan suatu sinyal yang dinyatakan dengan variabel waktu dan memenuhi :

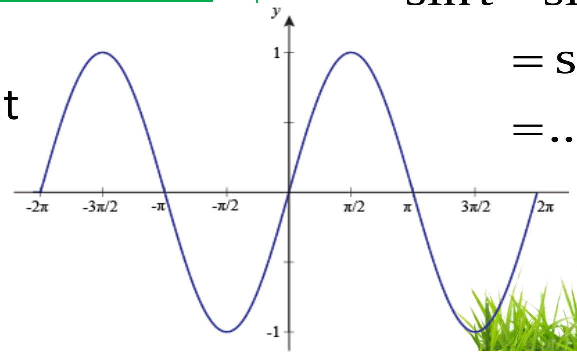
$$x(t+kT)=x(t) \quad untuk -\infty < t < \infty$$

dimana k adalah bilangan bulat.
T adalah perioda sinyal → Disebut **Periodic Time Function**

Contoh:

y = sin *t* adalah fungsi yang periodik terhadap nilai *t* dengan perioda sebesar 2π, karena :

$$\begin{aligned} \sin t &= \sin(t+2\pi) \\ &= \sin(t+4\pi) \\ &= \dots \end{aligned}$$

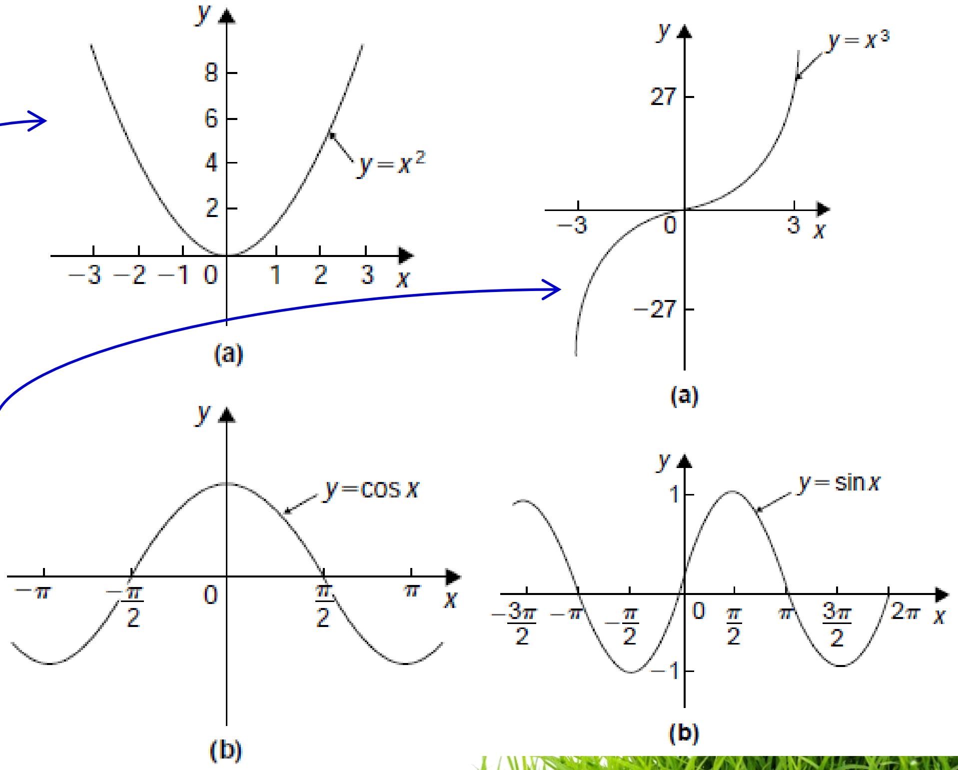


Klasifikasi Sinyal

Fungsi Ganjil Vs Fungsi Genap

Suatu fungsi $y = f(x)$ dikatakan merupakan **fungsi genap** apabila $f(-x) = f(x)$ untuk seluruh nilai x. Grafik fungsi genap selalu simetri terhadap sumbu y.

Suatu fungsi $y = f(x)$ dikatakan merupakan **fungsi ganjil** apabila $f(-x) = -f(x)$ untuk seluruh nilai x. Grafik fungsi genap selalu simetri terhadap titik pusat (origin). .



Klasifikasi Sinyal

Fungsi Cosinus / Sinusoidal

$$y(t) = A\sin(\alpha t + b)$$

$$y(t) = A\cos(\alpha t + b)$$

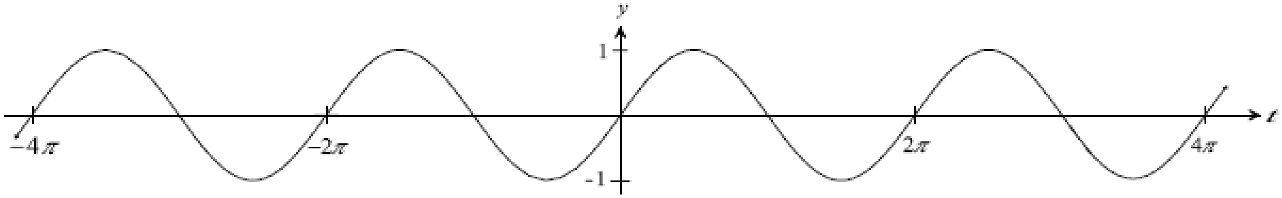
|A|	Amplitude
$\frac{2\pi}{\lvert\alpha\rvert}$	Periode
b	Phase Shift

<u>Contoh 1:</u>

$y = \sin t$ → T = 2π

alternatif penulisannya :

$y = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ atau $y = \sin(2\pi f t)$



Klasifikasi Sinyal

Fungsi Cosinus / Sinusoidal

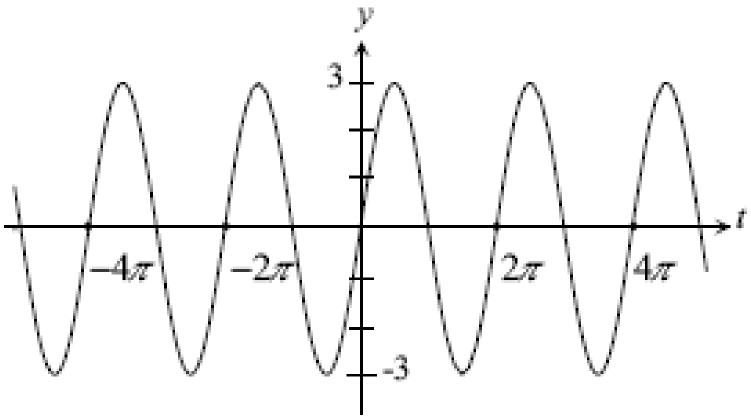
$$y(t) = A\sin(\alpha t + b)$$

$$y(t) = A\cos(\alpha t + b)$$

$\|A\|$	Amplitude
$\dfrac{2\pi}{\|\alpha\|}$	Periode
b	Phase Shift

Contoh 2 : **Perubahan amplitudo**

$y = 3 \sin t$



Klasifikasi Sinyal

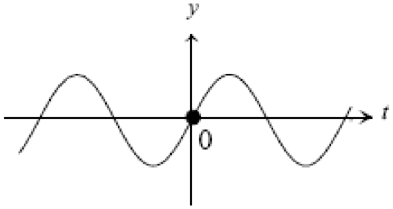
Fungsi Cosinus / Sinusoidal

$$y(t) = A\sin(\alpha t + b)$$

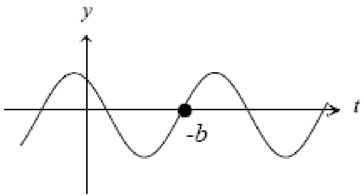
$$y(t) = A\cos(\alpha t + b)$$

$\lvert A \rvert$	Amplitude
$\dfrac{2\pi}{\lvert \alpha \rvert}$	Periode
b	Phase Shift

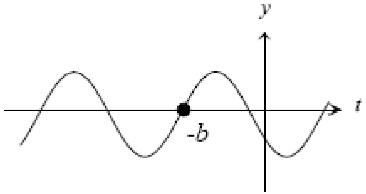
Contoh 3 : **Perubahan Phase**



(a) $y = \sin t$



(c) $y = \sin(t - b)$, $b < 0$



(b) $y = \sin(t + b)$, $b > 0$

Note: cosine is a shifted sine function:

$$\boxed{\cos(t) = \sin(t + \frac{\pi}{2})}$$

Klasifikasi Sinyal

Fungsi Cosinus / Sinus

$$y(t) = A\sin(\alpha t + b)$$

$$y(t) = A\cos(\alpha t + b)$$

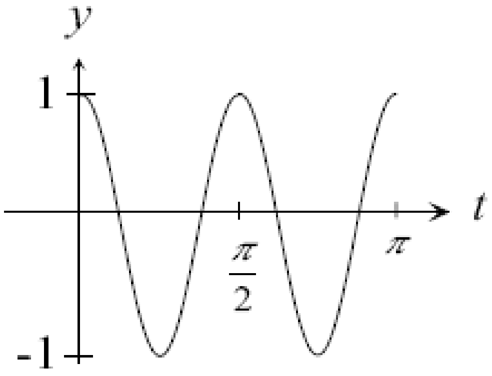
$\lvert A \rvert$	Amplitude
$\dfrac{2\pi}{\lvert\alpha\rvert}$	Periode
b	Phase Shift

Contoh 4: **Perubahan Perioda**

y = Cos 4t → T = $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

alternatif penulisannya :

$$y = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \text{ atau } y = \cos(2\pi f t)$$



Deret Fourier

	Continuous Time Function	Discrete Time Function
Periodic Time function	**Fourier Series** (Descrete Frequency Function)	**Discrete Fourier Transform** (Descrete Frequency Function)
Aperiodic Time function	**Continuous Fourier Transform** (Continues Frequency Function)	**Fourier Transform** (Descrete Frequency Function)

DERET FOURIER

DERET FOURIER →

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + a_3 \cos 3t + \ldots + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + b_3 \sin 3t + \ldots$$

Harmonik pertama (fundamental)

Harmonik kedua

Dimana pada rentang $-{}^{T}\!/_{2}$ hingga ${}^{T}\!/_{2}$:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos nt\,dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin nt\,dt$$

a_0, a_n dan b_n disebut koefisien deret Fourier dan jika koefisien-koefisien ini dapat ditentukan, maka deret pada persamaan diatas disebut **deret Fourier** untuk fungsi *f(t)*.

DERET FOURIER

$$\text{dari persamaan} \Rightarrow a_n \cos nt + b_n \sin nt = c_n \sin(nt + \alpha_n)$$

DERET FOURIER →
(Bentuk lain)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nt + \alpha_n)$$

$$f(t) = a_0 + c_1 \sin(t + \alpha_1) + c_2 \sin(2t + \alpha_2) + c_3 \sin(3t + \alpha_3) + \ldots$$

Harmonik pertama (fundamental)

Harmonik kedua

Dimana pada rentang $-{}^{T}/_{2}$ hingga ${}^{T}/_{2}$:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

$$c_n = \sqrt{\left(a_n{}^2 + b_n{}^2\right)}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\alpha_n = \tan^{-1}\frac{a_n}{b_n}$$

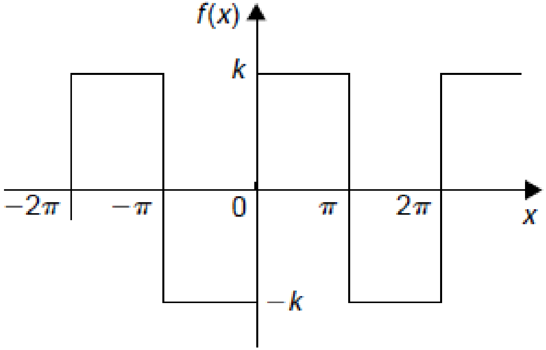
DERET FOURIER

CONTOH 1

Tentukan deret Fourier untuk suatu fungsi periodik *f(x),* dimana:

$$f(x) = \begin{cases} -k, & \text{Untuk } -\pi < x < 0 \\ +k, & \phantom{\text{Untuk }} 0 < x < \pi \end{cases}$$

Fungsi ini periodik untuk nilai *x* diluar rentang diatas dengan perioda *2π*.



DERET FOURIER

CONTOH 1

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -k\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} k\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\{[-kx]_{-\pi}^{0} + [kx]_{0}^{\pi}\} = 0$$

Dapat disimpulkan bahwa a_0 sebenarnya adalah nilai rata-rata dari fungsi untuk satu kali perioda (2π).

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} -k\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} k\cos nx\,\mathrm{d}x\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{-k\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{k\sin nx}{n}\right]_{0}^{\pi}\right\} = 0$$

DERET FOURIER

CONTOH 1

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} -k\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} k\sin nx\,\mathrm{d}x\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{k\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{-k\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}\right\}$$

Untuk n bernilai ganjil:

$$b_n = \frac{k}{\pi}\left\{\left[\left(\frac{1}{n}\right) - \left(-\frac{1}{n}\right)\right] + \left[-\left(-\frac{1}{n}\right) - \left(-\frac{1}{n}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{k}{\pi}\left\{\frac{2}{n} + \frac{2}{n}\right\} = \frac{4k}{n\pi}$$

Sehingga:

$$b_1 = \frac{4k}{\pi},\ b_3 = \frac{4k}{3\pi},\ b_5 = \frac{4k}{5\pi},$$

DERET FOURIER

CONTOH 1

Untuk n bernilai genap:

$$b_n = \frac{k}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right]+\left[-\frac{1}{n}-\left(-\frac{1}{n}\right)\right]\right\}=0$$

Sehingga:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty}(0 + b_n \sin nx)$$

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\sin x + \frac{4k}{3\pi}\sin 3x + \frac{4k}{5\pi}\sin 5x + \cdots$$

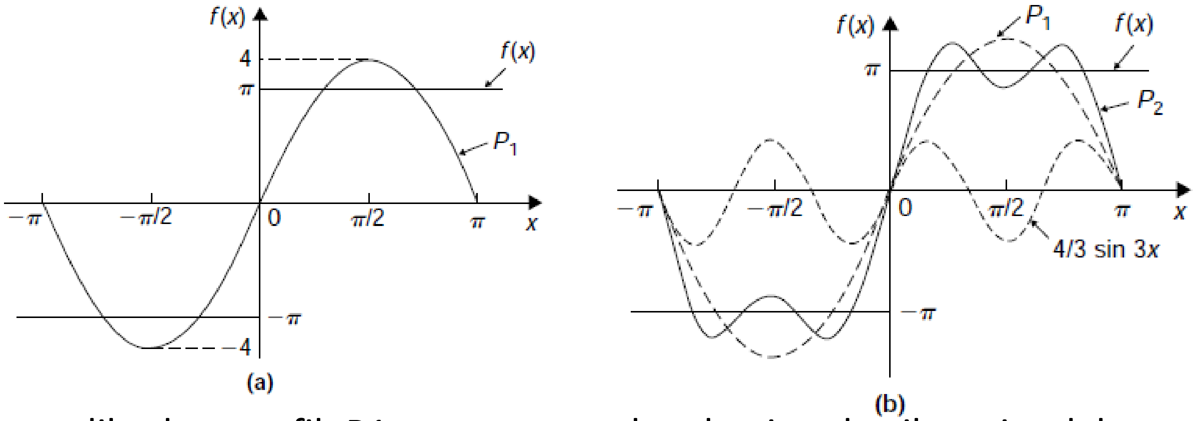
$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

DERET FOURIER

CONTOH 1

Misal K = π

$$f(x) = 4\left(\sin x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

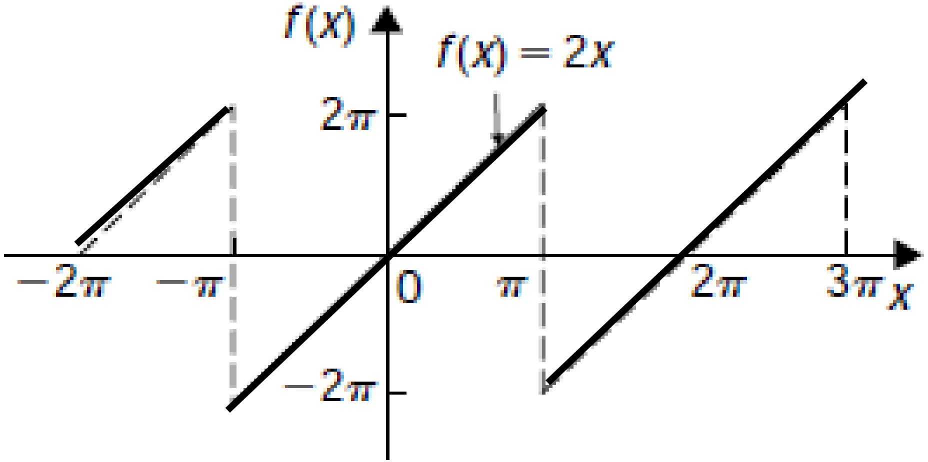


Gambar (a) memperlihatkan grafik P1 yang merupakan bagian hasil penjumlahan pertama dari deret Fourier dari fungsi yang direpresentasikannya. Gambar (b) memperlihatkan grafik P2 (garis bersambung) yang merupakan hasil penjumlahan dari bagian pertama dan bagian kedua (garis putus-putus) dari deret Fourier tersebut.

DERET FOURIER

CONTOH 2

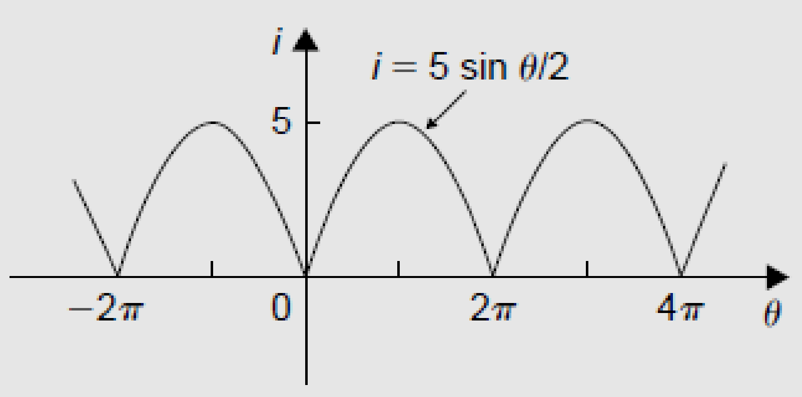
Tentukan deret Fourier untuk fungsi $f(x) = 2x$ pada rentang $-\pi$ hingga π.



DERET FOURIER

LATIHAN 1

Tentukan deret Fourier untuk gelombang sinusoid searah yang diperlihatkan pada gambar berikut:



Fungsi $i = 5\sin\frac{\theta}{2}$ adalah fungsi periodik dengan perioda sebesar 2π.

DERET FOURIER

DERET FOURIER UNTUK FUNGSI GENAP DAN FUNGSI GANJIL

DERET FOURIER FUNGSI GENAP

Deret Fourier untuk fungsi periodik genap *f(x)* yang memiliki perioda sebesar *2π* hanya memiliki suku-suku kosinus dan dapat memiliki suku konstanta.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

DERET FOURIER FUNGSI GANJIL

Deret Fourier untuk fungsi periodik ganjil *f(x)* yang memiliki perioda sebesar *2π* hanya memiliki suku-suku sinus dan tidak memiliki suku konstanta.

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

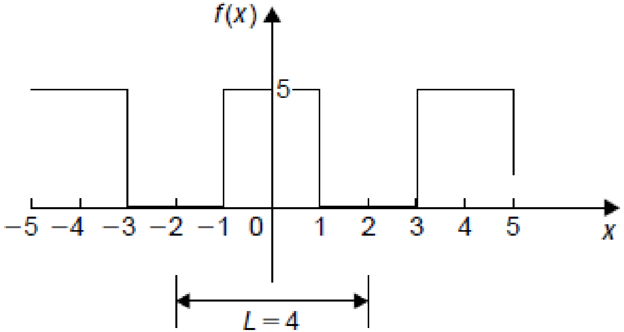
DERET FOURIER

LATIHAN SOAL

Tentukan deret Fourier untuk fungsi periodik tersebut.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{when } -2 \le x \le -1 \\ 5, & \text{when } -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{when } \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Fungsi tersebut periodik diluar rentang yang diberikan, dengan perioda = 4.



DERET FOURIER

DERET FOURIER BENTUK KOMPLEKS / BENTUK EKSPONENSIAL

Formula Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Dari:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}$$

Diperoleh:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{j\frac{2\pi nt}{T}} + e^{-j\frac{2\pi nt}{T}}}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{e^{j\frac{2\pi nt}{T}} + e^{-j\frac{2\pi nt}{T}}}{2j} \right)$$

Maka:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-j\frac{2\pi nt}{T}}$$

DERET FOURIER

DERET FOURIER BENTUK KOMPLEKS / BENTUK EKSPONENSIAL

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-j\frac{2\pi nt}{T}}$$

Dimana:

$$c_0 = a_0$$

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

bentuk kompleks atau bentuk eksponensial dari Deret Fourier.

$$\boxed{f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}}}$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\frac{2\pi nt}{T}}\, dt}$$

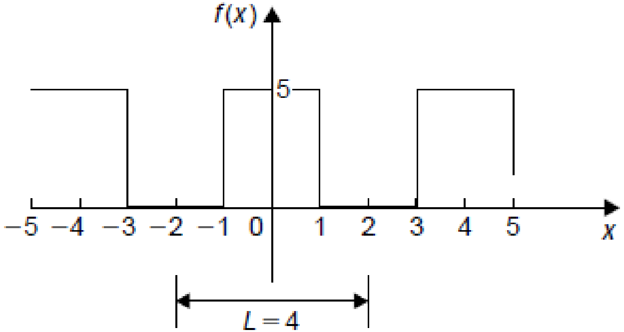
DERET FOURIER

CONTOH 3

Tentukan deret Fourier BENTUK KOMPLEKS untuk fungsi periodik tersebut.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{when } -2 \leq x \leq -1 \\ 5, & \text{when } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{when } \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Fungsi tersebut periodik diluar rentang yang diberikan, dengan perioda = 4.



DERET FOURIER

CONTOH 3

$$c_n = \frac{1}{4}\left\{\int_{-2}^{-1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} 5\,\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi n x}{4}}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} 0\,\mathrm{d}x\right\}$$

$$c_n = \frac{1}{4}\left\{\int_{-2}^{-1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} 5\,\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi n x}{4}}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} 0\,\mathrm{d}x\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 5\,\mathrm{e}^{-\frac{j\pi n x}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{4}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\frac{j\pi n x}{2}}}{-\frac{j\pi n}{2}}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{-5}{j2\pi n}\left[\mathrm{e}^{-\frac{j\pi n x}{2}}\right]_{-1}^{1} = \frac{-5}{j2\pi n}\left(\mathrm{e}^{-\frac{j\pi n}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{j\pi n}{2}}\right)$$

$$= \frac{5}{\pi n}\left(\frac{\mathrm{e}^{j\frac{\pi n}{2}} - \mathrm{e}^{-j\frac{\pi n}{2}}}{2j}\right) = \frac{5}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}$$

Maka deret Fourier kompleksnya menjadi:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{j\frac{2\pi n x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{5}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\,\mathrm{e}^{j\frac{\pi n x}{2}}$$

DERET FOURIER

CONTOH 3

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 5\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{5}{4}[x]_{-1}^{1} = \frac{5}{4}[1-(-1)] = \frac{5}{2}$$

$$c_1 = \frac{5}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{5}{\pi}$$

$$c_2 = \frac{5}{2\pi}\sin\pi = 0$$

Untuk n genap, $c_n = 0$, karena $\sin \pi = 0$.

$$c_3 = \frac{5}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} = \frac{5}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2} = -\frac{5}{3\pi}$$

Dst

Dengan cara yang sama :

$$c_{-1} = \frac{5}{-\pi}\sin\frac{-\pi}{2} = \frac{5}{\pi}$$

$$c_{-2} = -\frac{5}{2\pi}\sin\frac{-2\pi}{2} = 0 = c_{-4} = c_{-6}, \text{ and so on.}$$

$$c_{-3} = -\frac{5}{3\pi}\sin\frac{-3\pi}{2} = -\frac{5}{3\pi}$$

$$c_{-5} = -\frac{5}{5\pi}\sin\frac{-5\pi}{2} = \frac{5}{5\pi}, \text{ and so on.}$$

Transformasi Fourier

FOURIER ANALYSIS

	Continuous Time Function	Discrete Time Function
Periodic Time function	Fourier Series (Descrete Frequency Function)	Discrete Fourier Transform (Descrete Frequency Function)
Aperiodic Time function	Continuous Fourier Transform (Continues Frequency Function)	Fourier Transform (Descrete Frequency Function)

TRANSFORMASI FOURIER WAKTU KONTINU

- Kita telah bahas bahwa signal periodik bisa direpresentasikan dengan menggunakan deret Fourier
- Apakah signal yang tidak periodik (Aperiodik) bisa direpresentasikan juga dengan komponen - komponen frekuensi?
- Jawabannya adalah, BISA yaitu dengan menggunakan **TRANSFORMASI FOURIER**

TRANSFORMASI FOURIER WAKTU KONTINU

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} f_T(t)$$

$$f_T(t)$$

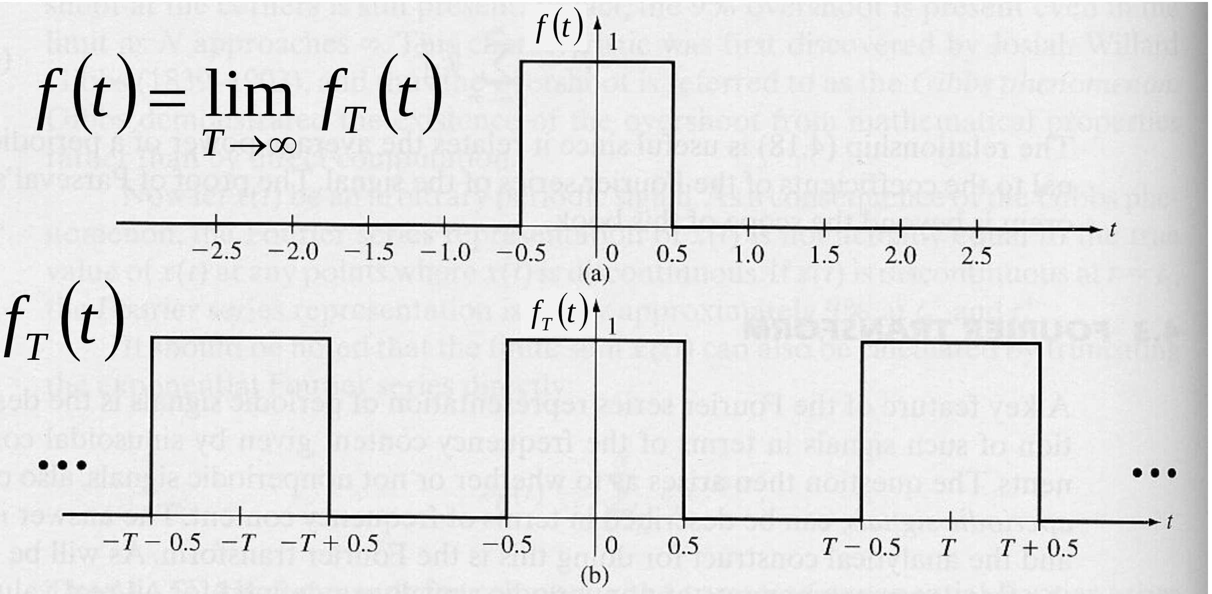
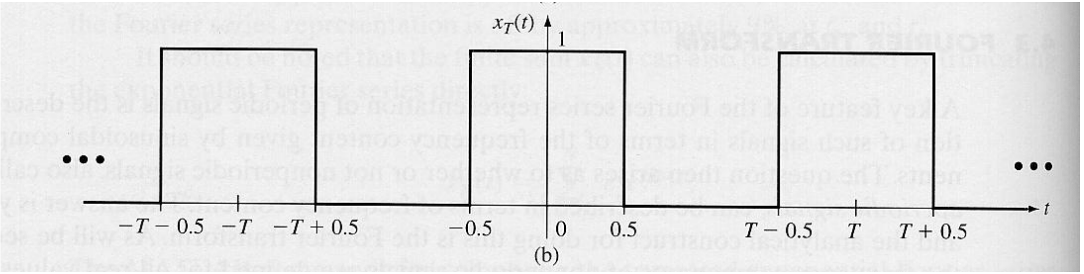


Figure 4.12 Plots of the (a) one-second rectangular pulse and (b) pulse train.

TRANSFORMASI FOURIER WAKTU KONTINU

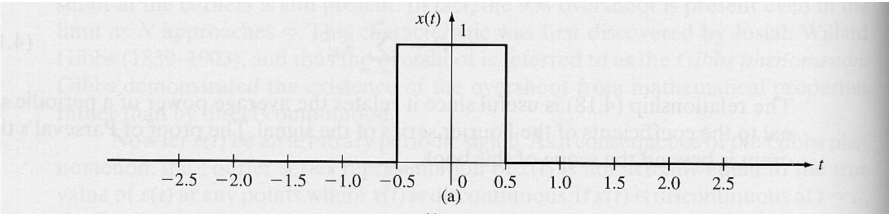


$$f_T(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}}$$

Dimana :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-j\frac{2\pi nt}{T}} dt$$

TRANSFORMASI FOURIER WAKTU KONTINU



Bagaimana jika T→∞

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\frac{2\pi nt}{T}}dt$$

Untuk n = 0

$$c_0 = \frac{1}{T}$$

Untuk n = $\pm$1, $\pm$2, ...

$$c_n = \frac{\sin\left(\frac{n2\pi}{2T}\right)}{n\pi} = \frac{\sin\left(\frac{n\omega_0}{2}\right)}{n\pi}$$

TRANSFORMASI FOURIER
WAKTU KONTINU

Grafik $\frac{|c_n|}{|c_0|} = T|c_n|$ vs. $\omega = n\omega_0$

untuk $T = 2, 5, 10$

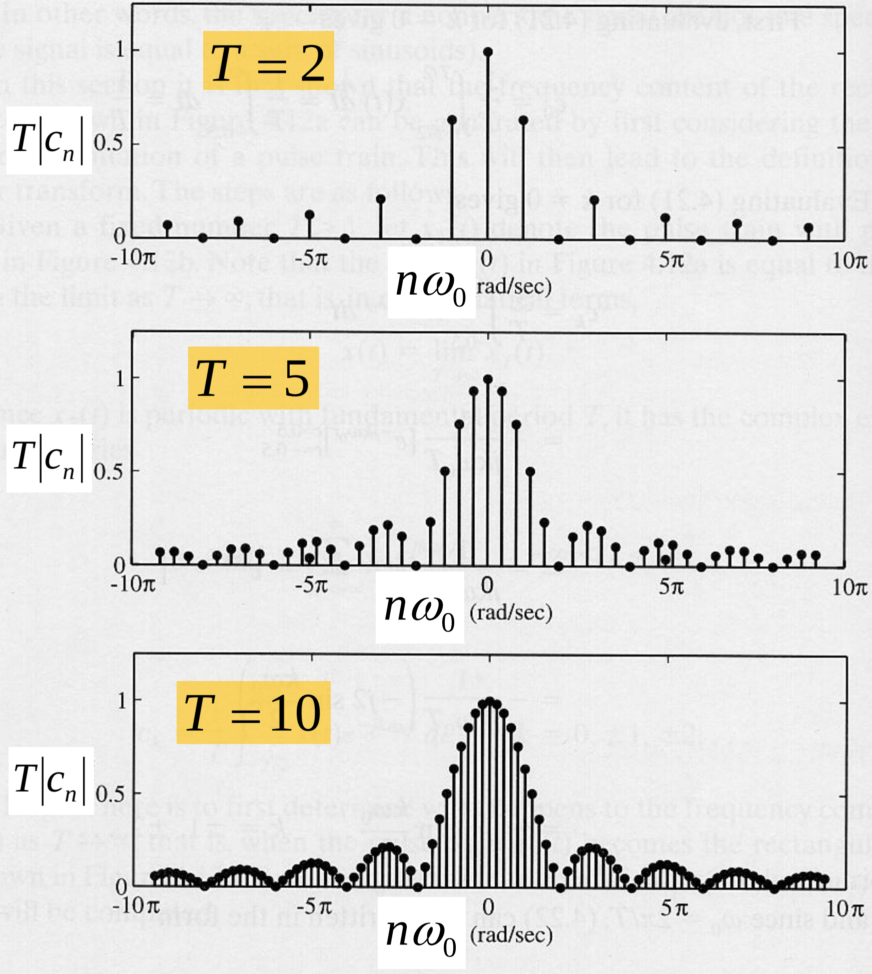


Figure 4.13 Plot of scaled spectrum of $x_T(t)$ for (a) $T = 2$, (b) $T = 5$, and (c) $T = 10$.

TRANSFORMASI FOURIER WAKTU KONTINU

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \qquad\qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] \omega_0 e^{jn\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} d\omega$$

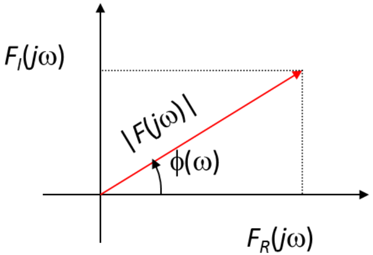
$$T \rightarrow \infty \Rightarrow f_T(t) \rightarrow f(t)$$

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow \omega = d\omega = \Delta\omega \approx 0$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega$$

TRANSFORMASI FOURIER WAKTU KONTINU

Fourier Transform:



$$\boxed{F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt}$$

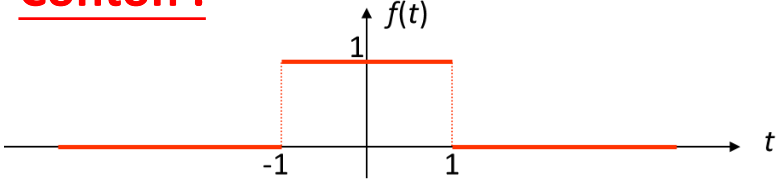
$$F(j\omega) = F_R(j\omega) + jF_I(j\omega) = \underbrace{|F(j\omega)|}_{\text{Magnitude}}\, e^{\overbrace{j\phi(\omega)}_{\text{Phase}}}$$

Inverse Fourier Transform:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

TRANSFORMASI FOURIER WAKTU KONTINU

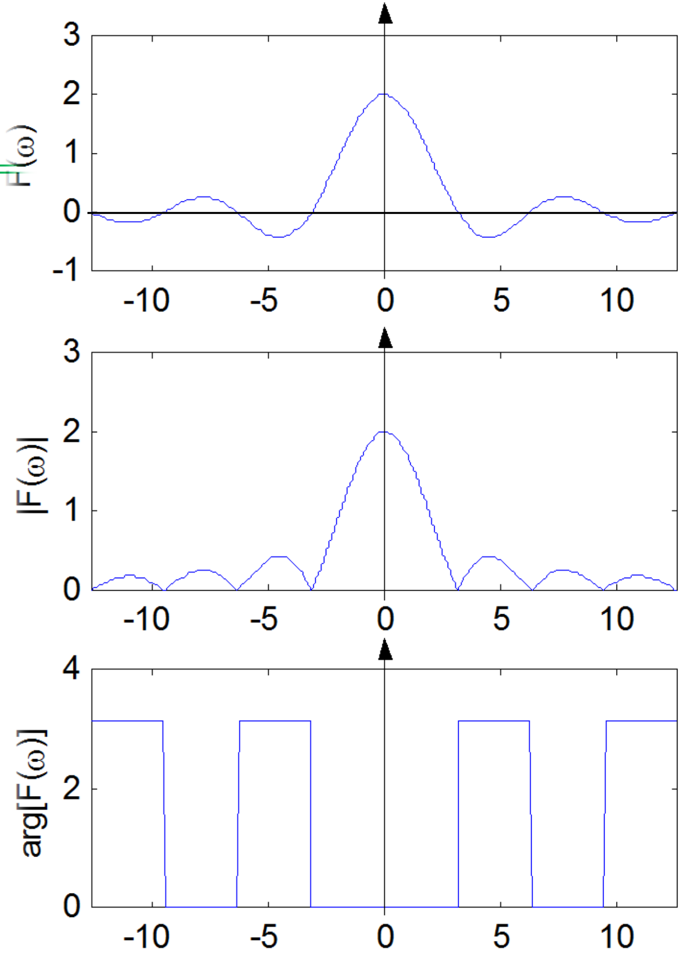
Contoh :



$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \;=\int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{1} \;=\frac{j}{\omega}(e^{-j\omega}-e^{j\omega})$$

$$=\frac{2\sin\omega}{\omega}$$



TRANSFORMASI FOURIER WAKTU KONTINU

Sifat-sifat Transformasi Fourier

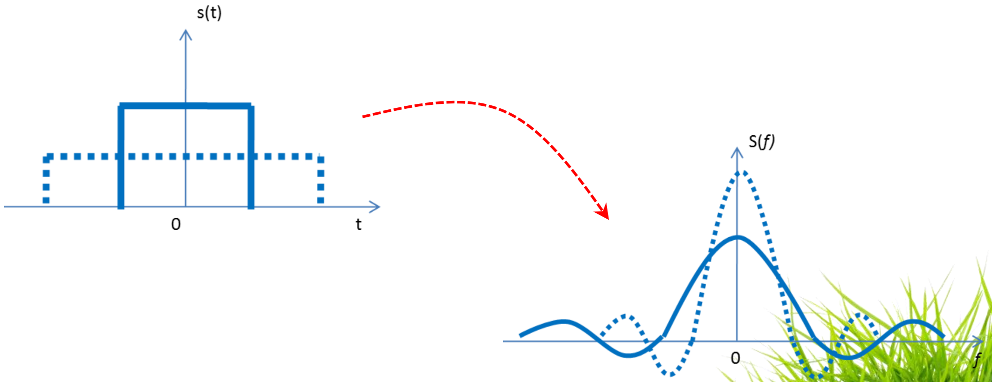
Linearity

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$$

Time Scalling

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega)$$

$$f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$



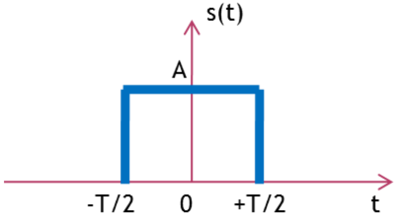
TRANSFORMASI FOURIER WAKTU KONTINU

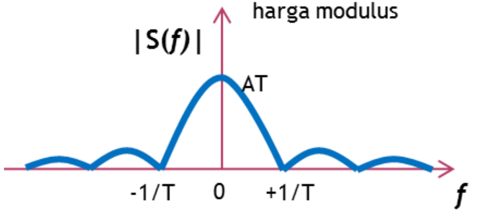
Sifat-sifat Transformasi Fourier

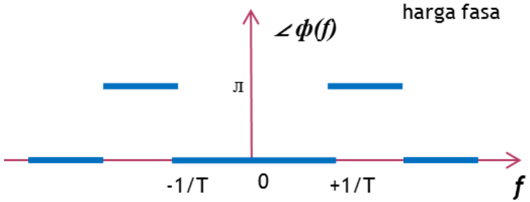
Time Shifting

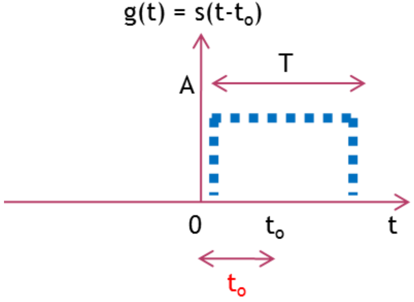
$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega)$$

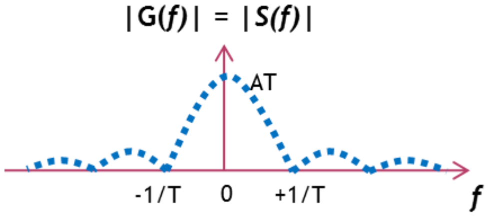
$$f(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

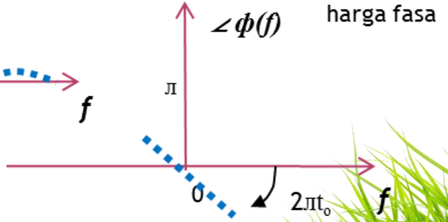












TRANSFORMASI FOURIER WAKTU KONTINU

Sifat-sifat Transformasi Fourier

Frequency Shifting

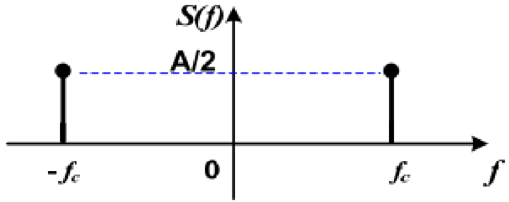
$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F[j\omega]$$

$$f(t)e^{-j\omega_0} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F[j(\omega-\omega_0)]$$

Contoh :

$$s(t) = A \cos 2\pi f_c t = \frac{A}{2}\left(e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}\right)$$

maka $$S(f) = \frac{A}{2}\delta(f+f_c) + \frac{A}{2}\delta(f-f_c)$$



TRANSFORMASI FOURIER WAKTU KONTINU

Sifat-sifat Transformasi Fourier

Differensiasi di kawasan waktu

$$f(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(j\omega)$$

$$f'(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\omega F(j\omega)$$

Integrasi di kawasan waktu

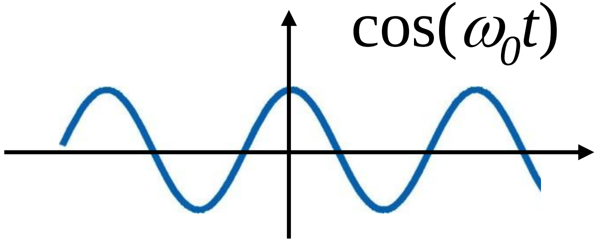
$$f(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(j\omega)$$

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(x)dx\right] = \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$$

LATIHAN SOAL

1. Carilah Transformasi Fourier dari fungsi berikut

$$\cos(\omega_0 t)$$

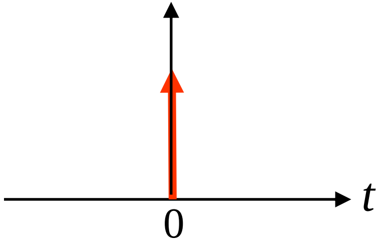


TRANSFORMASI FOURIER WAKTU KONTINU

TF untuk fungsi fungsi istimewa

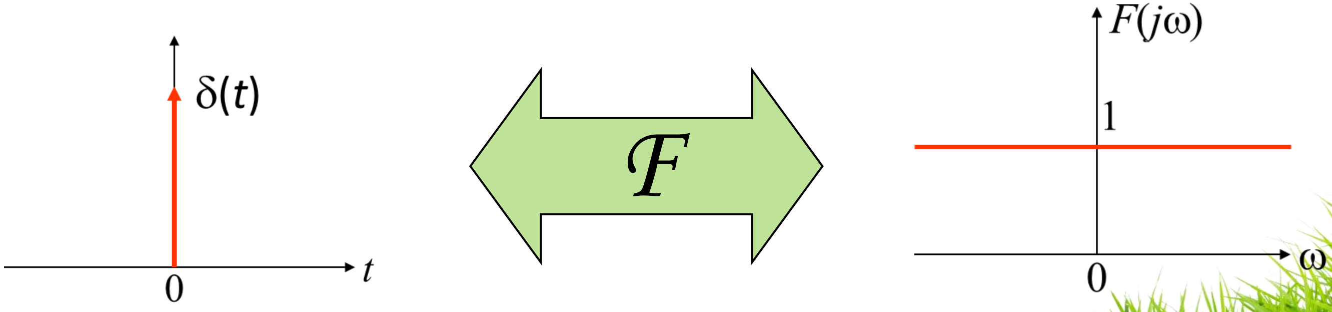
Fungsi Delta Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



Disebut juga *unit impulse function*.

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \;\; = e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} \;\; = 1$$



TRANSFORMASI FOURIER WAKTU KONTINU

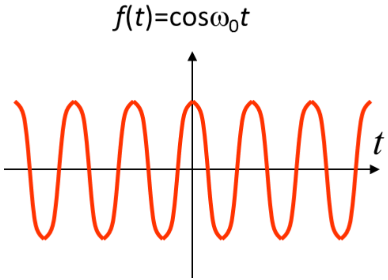
TF untuk fungsi fungsi istimewa

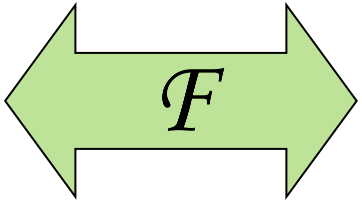
Fungsi Cosinus

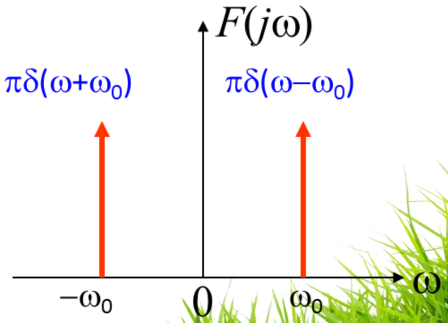
$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt$$

$$= \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$$







TRANSFORMASI FOURIER WAKTU KONTINU

TF untuk fungsi fungsi istimewa

Fungsi Pulsa

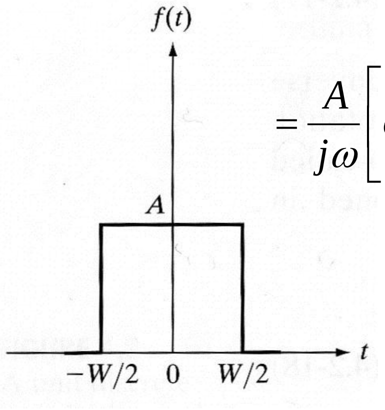
$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-W/2}^{W/2} Ae^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{-A}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-W/2}^{W/2}=\frac{-A}{j\omega}\left[e^{-j\omega\frac{W}{2}}-e^{j\omega\frac{W}{2}}\right]$$

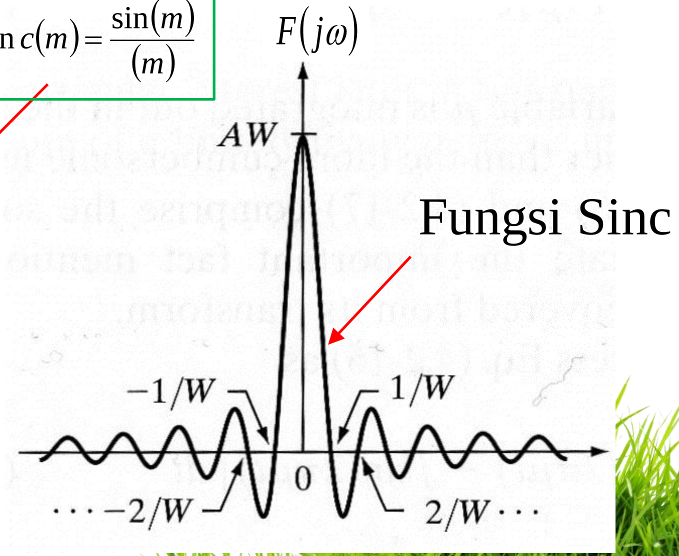
$$=\frac{A}{j\omega}\left[e^{j\omega\frac{W}{2}}-e^{-j\omega\frac{W}{2}}\right]=AW\frac{\sin\left(\omega\frac{W}{2}\right)}{\left(\omega\frac{W}{2}\right)}$$

Fungsi Sinc

$$\sin c(m)=\frac{\sin(m)}{(m)}$$



$\mathcal{F}$



Thank you!